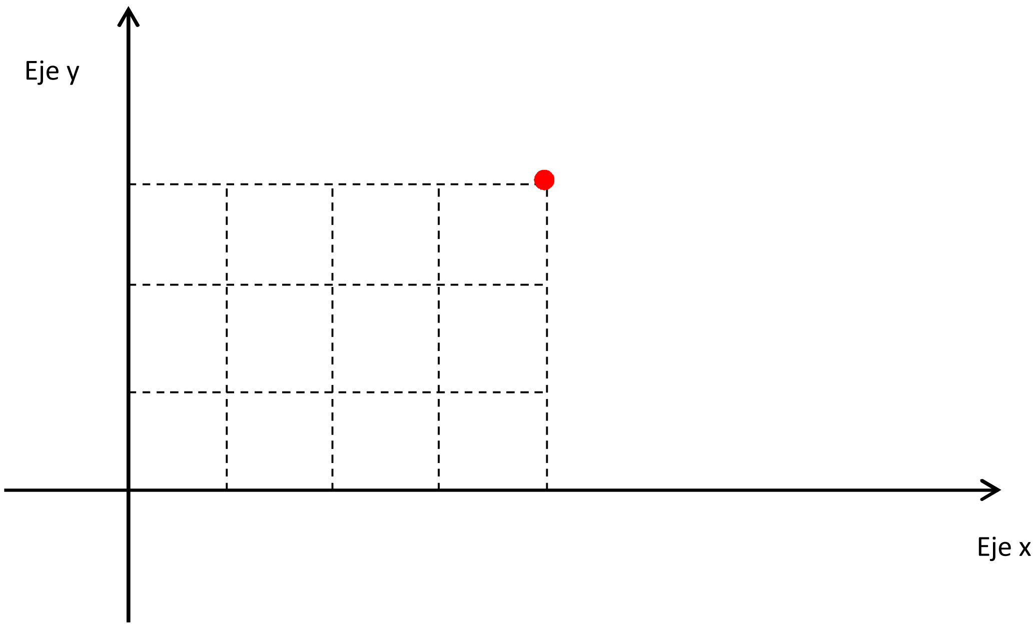
COORDENADAS POLARES Y CARTESIANAS

Al avanzar por el mundo de las matemáticas nos encontramos que hay varios sistemas de coordenadas posibles para resolver los problemas. En concreto, hay momentos en los que utilizar unas coordenadas diferentes a las cartesianas (las (x, y) de toda la vida) nos puede solucionar mucho un problema. Por ejemplo, al trabajar con espirales, son mucho más cómodas las coordenadas polares que las cartesianas.

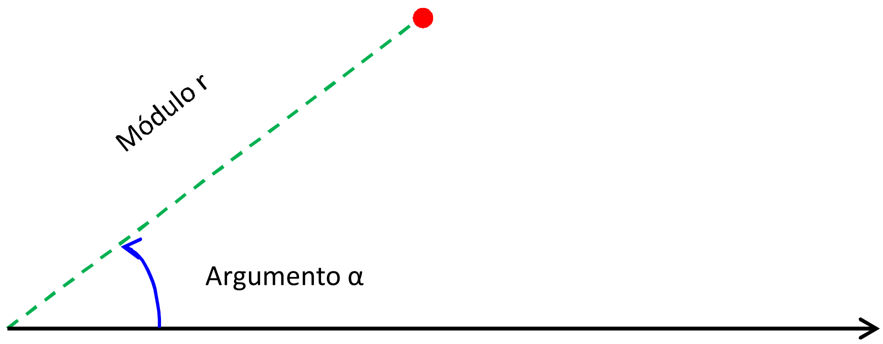
Supongamos que estamos en el plano (por lo tanto tenemos dos coordenadas, las antes mencionadas (x, y)). ¿Cómo funciona eso de las coordenadas polares? Pues bien, en vez de utilizar una cuadrícula y usar dos "distancias según los ejes" que serían x e y, lo que hacemos es utilizar una única distancia llamada módulo (y que es la distancia de nuestro punto al origen de coordenadas) y un ángulo llamado argumento que es el ángulo en sentido contrario a las agujas del reloj a partir del "eje origen de ángulos" (la horizontal hacia la derecha…).

¿Ya os habéis liado? Mirad estos dibujitos, que lo aclaran todo…



Aquí tenéis la típica cuadrícula de las coordenadas cartesianas para representar el punto (4,3).

Pero ese mismo punto también se puede representar en coordenadas polares, como serían:



Con esos dos datos podemos localizar el punto con igual precisión.

$$(x, y) = r_\alpha$$

La equivalencia entre unas y otras es muy sencilla, nos la da Pitágoras y la trigonometría. Por ejemplo, en el caso que he dibujado, para hallar r y alfa es muy sencillo ya que:

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\alpha = atn\,\frac{3}{4} = 36{,}87\ º = 0{,}6435\ rad$$

Con lo que ya tenemos las coordenadas en polares. Para el caso inverso, se trata de multiplicar el módulo por coseno y seno del argumento respectivamente…. Por ejemplo, si tenemos un punto en coordenadas polares definido por módulo 4 y argumento $^{\pi}/_{3}$, tendremos:

$$4_{\pi/3} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x = r \cdot cos\alpha = 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \\ y = r \cdot sen\alpha = 4 \cdot sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad (2, 2\sqrt{3})$$

Es muy importante que entendamos que módulo y argumento son dos medidas diferentes (una es una distancia, la otra un ángulo) y que no se están ni multiplicando ni operando de ninguna manera entre sí. Son tan "independientes entre sí" como lo son x e y.

¿Y todo esto para qué?

Pues, por ejemplo, resulta que al operar con números complejos (que son números en dos dimensiones ¿?¿?¿? toma ya!!!), nos encontramos con la expresión binómica del número complejo y la forma polar. Y se trata de exactamente lo mismo que acabo de explicar. El módulo nos daría la "distancia" en el plano complejo entre el origen de coordenadas y nuestro número (punto) complejo y el argumento nos da el ángulo desde el origen de ángulos.

Y lo de la independencia lo comento porque a veces nos liamos al hacer operaciones… Por ejemplo: Supongamos que tenemos un número complejo dado en forma binómica del tipo:

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \cdot i$$

Y nos pidieran calcular su raíz cuarta. Lo primero sería pasar este número en forma binómica a forma polar:

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\arg z = atn\ \frac{3/2}{-\sqrt{3}/2} = atn\ \frac{3}{-\sqrt{3}} = atn - \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = atn - \frac{3\sqrt{3}}{3} = atn - \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \arg z = -\frac{\pi}{3} \\ \arg z = \frac{2\pi}{3} \end{matrix}$$

Como que tenemos dos posibles ángulos (diferenciados en 180º) hemos de decidir cuál es el bueno, pero enseguida se ve que el primero no puede ser ya que necesitaría que la parte real fuera positiva y la imaginaria negativa (justo al revés de lo que tenemos), por lo que es el segundo. Por lo tanto:

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \cdot i = \sqrt{3}_{2\pi/3}$$

Ahora hemos de hacer la raíz cuarta, por lo tanto:

$$w = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{\sqrt{3}_{2\pi/3}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[4]{\sqrt{3}} = \sqrt[8]{3} \\ \arg w = \dfrac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} \quad k = 0,1,2,3 \quad \Rightarrow \begin{cases} w_1 = \dfrac{\frac{2\pi}{3}}{4} = \dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6} \\ w_2 = \dfrac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{4} = \dfrac{\frac{2\pi + 6\pi}{3}}{4} = \dfrac{8\pi}{12} = \dfrac{2\pi}{3} \\ w_3 = \dfrac{\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{4} = \dfrac{\frac{2\pi + 12\pi}{3}}{4} = \dfrac{14\pi}{12} = \dfrac{7\pi}{6} \\ w_4 = \dfrac{\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{4} = \dfrac{\frac{2\pi + 18\pi}{3}}{4} = \dfrac{20\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Al hacer la raíz cuarta, el módulo es la raíz cuarta del módulo (por eso nos queda la raíz octava de 3, mientras que el argumento se calcula mediante una simple división….Por eso insistía en que son dos números distintos y que funcionan de forma diferente….

Yatá.