PRIMERA REGLA DEL CAMBIO DE VARIABLE

A la hora de hacer una integral por cambio de variable, hay una regla que, sin ser una verdad absoluta, suele funcionar bastante bien, que viene a decir que:

“Lo que molesta” = t

Insisto en que no siempre es así, pero nos puede dar una idea, sobre todo en integrales no demasiado complicadas como las que se ven en esta asignatura. Veamos un ejemplo:

Calculad

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$$

En este caso, lo que nos molesta es, claramente, esa raíz cuadrada del denominador, por lo que haremos:

$$\sqrt{x} = t \quad \Rightarrow \quad x = t^2 \quad \Rightarrow \quad dx = 2 \cdot t \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x + \sqrt{x}} \cdot dx = \int \frac{2 \cdot t \cdot dt}{t^2 + \sqrt{t^2}}$$

$$= 2 \cdot \int \frac{t \cdot dt}{t^2 + t} = 2 \cdot \int \frac{dt}{t + 1} = 2 \cdot \ln|t + 1| = 2 \cdot \ln\left|\sqrt{x} + 1\right|$$

Podemos ver otro caso de aplicación de esta regla básica en el siguiente ejemplo:

Dada la función:

$$f(x) = x \cdot \sqrt{9 - x^2}$$

Calculad su primitiva.

En este caso nos volvemos a encontrar con lo mismo, una raíz cuadrada que molesta bastante. Podemos plantearlo como antes o, más sencillo, “lo de dentro” = t^2 (para que se nos vaya la raíz). Nos quedaría algo así como lo siguiente:

$$9 - x^2 = t^2 \quad \Rightarrow \quad -2 \cdot x \cdot dx = 2 \cdot t \cdot dt \quad \Rightarrow \quad x \cdot dx = -t \cdot dt$$

$$F(x) = \int x \cdot \sqrt{9 - x^2}\, dx = \int \sqrt{9 - x^2} \cdot x \cdot dx = -\int \sqrt{t^2} \cdot t \cdot dt = \frac{-t^3}{3} = \frac{-(t^2)^{3/2}}{3}$$

$$= \frac{-(9 - x^2)^{3/2}}{3}$$

Os pongo un último caso de “este tipo con raíces” para que veáis que se trata de una solución bastante recurrente.....

Dada la integral:

$$\int \frac{1}{(1+x)\cdot\sqrt{x}}\cdot dx$$

Calculad la primitiva.

Nos volvemos a encontrar con el caso de una raíz cuadrada que molesta, por lo tanto, hacemos lo de siempre....Para calcular la primitiva de la integral hacemos el cambio:

$$x = t^2 \qquad \Rightarrow \qquad dx = 2\cdot t\cdot dt \qquad y\ además \qquad \sqrt{x} = t$$

Por lo que nos queda que:

$$F(x) = \int \frac{1}{(1+x)\cdot\sqrt{x}}\cdot dx = \int \frac{2\cdot t\cdot dt}{(1+t^2)\cdot t} = 2\cdot\int\frac{dt}{1+t^2} = 2\cdot \arctan t = 2\cdot arc\ tan\sqrt{x}$$

Pero el problema nos lo puede causar alguien diferente a las raíces. Por ejemplo, las exponenciales. Este es otro caso que sale un montón. Por ejemplo:

Calculad una primitiva de la función

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

Lo primero es darnos cuenta de que lo que molesta aquí son las exponenciales, por lo que es casi para suspender al que no haga el cambio:

$$t = e^x \quad \Rightarrow \quad dt = e^x\cdot dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{e^x} = dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{t} = dx$$

Por otro lado tenemos que:

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{t}$$

Con lo que nos queda:

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\cdot dx = \int \frac{1}{t+\frac{1}{t}}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{t\cdot\left(t+\frac{1}{t}\right)} = \int\frac{dt}{1+t^2} = arc\tan t = arc\tan e^x + C$$

O fijaos en este caso, que se parece mucho.....

Calculad la integral:

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\cdot dx$$

Está claro que, otra vez, lo que nos provoca un problema es la presencia de las exponenciales, por lo que planteamos el cambio de variable:

$$u = e^x \qquad \Rightarrow \qquad du = e^x \cdot dx \qquad \Rightarrow \qquad e^{2x} = (e^x)^2 = u^2$$

Por lo tanto:

$$F(x) = \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \cdot dx = \int \frac{du}{1 + u^2} = arc\tan u = arc\tan e^x$$

SEGUNDA REGLA DEL CAMBIO DE VARIABLE

A veces nos encontramos con expresiones que son algo más complicadas pero que, con un poco de picardía podemos resolver "viendo" la forma de lo que nos proponen. Por ejemplo, dándonos cuenta de que si hacemos un determinado cambio "lo que hay por delante" se parece a la derivada de "algo". Me explico con un ejemplo y seguro que lo entendéis mejor.

Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}}$$

Buscar una primitiva de la función.

En este caso tenemos una raíz cúbica y encima, "lo de dentro" está elevado al cuadrado. Pero, si nos fijamos bien, nos damos cuenta de que lo que está dentro del paréntesis tiene una derivada que se parece mucho al numerador de la fracción, por lo que lo que tenemos que hacer es....

$$x^2 - 4 = t \qquad \Rightarrow \qquad 2 \cdot x \cdot dx = dt \qquad \Rightarrow \qquad x \cdot dx = \frac{dt}{2}$$

Con lo que la integral se convierte en:

$$F(x) = \int \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}} \cdot dx = \int \frac{x}{(x^2 - 4)^{2/3}} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t^{2/3}} = \frac{1}{2} \cdot \int t^{-2/3} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{1/3}}{1/3}$$
$$= \frac{3 \cdot t^{1/3}}{2} = \frac{3 \cdot (x^2 - 4)^{1/3}}{2}$$

Este tipo de caso también se ve muy claro en el siguiente ejemplo:

Sea la función

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{\ln x}}$$

Calculad una primitiva.

En este caso, nos pasa como antes. Es cierto que tenemos una raíz cuadrada, pero lo que hay dentro de la raíz es todavía “más feo” que la raíz, (y además por ahí delante vemos un 1/x que es precisamente la derivada del logaritmo) por lo que hacemos:

$$t = \ln x \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{x} \cdot dx$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$F(x) = \int \frac{1}{x \cdot \sqrt{\ln x}} \cdot dx = \int \frac{\frac{1}{x} \cdot dx}{\sqrt{\ln x}} = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot dt = \int t^{\frac{-1}{2}} \cdot dt = \frac{t^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot t^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \cdot (\ln x)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\ln x}$$

Y ya que hemos cerrado el primer apartado con una exponencial, vamos a hacer lo mismo con este. Una exponencial, pero que si nos fijamos, podemos simplificar al relacionar términos “anteriores” con la derivada de……

Considerad la función:

$$f(x) = -\frac{2}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x^2}}$$

Calculad la primitiva de f(x), denotada por F(x), que verifica que F(1) = 0.

Para calcular la primitiva pedida hemos de realizar la integral:

$$I = \int -\frac{2}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x^2}} \cdot dx$$

Al principio parece que la tengamos que hacer por partes (tenemos una cosa que es un “polinomio” multiplicando una exponencial) pero si lo intentamos vamos a ver que se nos complica cada vez más en vez de irse simplificando y es que el “polinomio” NO es un polinomio de verdad, sino una racional con un polinomio en el denominador. Y eso es una faena.

Sin embargo, podemos probar otra cosa. El primer término se parece mucho a la derivada del exponente.... ¿qué os sugiere eso?...... Vamos a probar con un cambio de variable:

Si llamamos:

$$t = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \qquad \Rightarrow \qquad dt = -2 \cdot x^{-3} \cdot dx = \frac{-2}{x^3} \cdot dx$$

De manera que podemos hacer:

$$I = \int -\frac{2}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x^2}} \cdot dx = \int e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{2}{x^3} \cdot dx\right) = \int e^t \cdot dt = e^t + C = e^{\frac{1}{x^2}} + C$$

Ahora ya podemos calcular la primitiva pedida:

$$0 = F(1) = e^{\frac{1}{1^2}} + C = e + C \qquad \Rightarrow \qquad C = -e$$

Y la primitiva pedida es:

$$F(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - e$$

TERCERA REGLA DEL CAMBIO DE VARIABLE

El tercer gran grupo no es que se trate de una regla en especial. Es que los senos y los cosenos sufren una especie de endogamia y se pueden tratar de una forma especial.... Por ejemplo:

Sea la función

$$f(x) = \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin x}$$

Calculad una primitiva.

En este caso, se mezclan un poco los dos anteriores....Por un lado, tanto el seno como el coseno molestan (el seno molesta más, que sale en más sitios ¿no?) y además el coseno y el seno son la derivada (más o menos) el uno del otro. Por lo tanto, lo que nos pide el cuerpo es hacer:

$$sen\, x = t \qquad \Rightarrow \qquad \cos x \cdot dx = dt$$

Por lo tanto, nos queda que:

$$F(x) = \int \frac{sen\, x \cdot \cos x}{1 + sen\, x} dx = \int \frac{t \cdot dt}{1 + t}$$

Y esta es una racional, muy sencilla, pero una racional. Lo primero es dividir los polinomios. Usamos Ruffini:

	1	0
-1		-1
	1	-1

Es decir, tenemos que:

$$\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1}$$

Y nuestra integral se convierte en:

$$F(x) = \int \frac{t}{1+t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = \int dt - \int \frac{dt}{1+t} = t - \ln|1+t|$$
$$= sen\, x - \ln|1 + sen\, x|$$

En este ejemplo se veía bastante claro el cambio ya que el cos x nos aparecía en el numerador y era fácil verlo como la derivada del sin x. Es un caso clásico, pero..... ¿qué pasa si no lo tenemos “arriba”? ¿Cómo nos manejamos entonces?. Pues mirad este ejemplo, porque entonces tenemos que tirar del Teorema fundamental de la trigonometría (que por cierto hay que manejarlo a “velocidad de concurso”...):

Calculad la integral:

$$\int \frac{1}{\sin(x)\cdot\cos(x)}\cdot dx$$

Aunque en este caso no sea tan claro como en el anterior, vamos a aplicar el mismo cambio, a ver qué pasa:

$$u = \sin x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} du = \cos x \cdot dx & \Rightarrow \quad dx = \dfrac{du}{\cos x} = \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ sin^2x + cos^2x = 1 & \Rightarrow \quad \cos x = \sqrt{1-sin^2x} = \sqrt{1-u^2} \end{cases}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\int \frac{1}{\sin(x)\cdot\cos(x)}\cdot dx = \int \frac{1}{u\cdot\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{du}{u\cdot(1-u^2)} = \int \frac{du}{u\cdot(1-u)\cdot(1+u)}$$
$$= \int \frac{-du}{u\cdot(u-1)\cdot(u+1)}$$

Ya tenemos lo que buscamos: Una racional, que esta sí la sabemos hacer. Ahora hemos de hacer la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{-1}{u\cdot(u-1)\cdot(u+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{u-1} + \frac{C}{u+1}$$

Reduciendo a común denominador e igualando los numeradores nos queda:

$$-1 = A\cdot(u-1)\cdot(u+1) + B\cdot u\cdot(u+1) + C\cdot u\cdot(u-1)$$

Vamos dando valores a u (en concreto los valores {0, 1, -1}) y tenemos:

$$u = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 = A\cdot(-1)\cdot 1 \quad \Rightarrow \quad -1 = -A \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

$$u = 1 \quad \Rightarrow \quad -1 = B\cdot 1\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad -1 = 2B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{-1}{2}$$

$$u = -1 \quad \Rightarrow \quad -1 = C\cdot(-1)\cdot(-2) \quad \Rightarrow \quad -1 = 2C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{-1}{2}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\int \frac{1}{\sin(x)\cdot\cos(x)}\cdot dx = \int \frac{-du}{u\cdot(u-1)\cdot(u+1)} = \int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u-1} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u+1}$$

$$= \ln u - \frac{1}{2}\cdot\ln|u-1| - \frac{1}{2}\cdot\ln|u+1| = \ln\left|\frac{u}{(u-1)^{1/2}\cdot(u+1)^{1/2}}\right|$$

$$= \ln\left|\frac{u}{\sqrt{(u-1)(u+1)}}\right| = \ln\left|\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\right| = \ln\left|\frac{\sin x}{\sqrt{sin^2 x-1}}\right|$$

$$= \ln\left|\frac{\sin x}{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{1-sin^2 x}}\right| = \ln\left|\frac{\sin x}{-\cos x}\right| = \ln|\tan x|$$

CUARTA REGLA: UN CASO ESPECIAL

El caso que os presento para terminar es un problema muy específico, pero que se ve con cierta frecuencia. Aparentemente no tiene nada que ver con los senos y cosenos pero, ya se sabe!!!!, los matemáticos sacan la varita mágica y son capaces de sacar una e o un seno de donde parece imposible…..

El primer ejemplo es éste:

Calculad una primitiva de la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$$

Ya os he dicho que es un caso muuuuuy especial. Si en vez de tener en la raíz un 9 tuviéramos un 1 nos recordaría un poco al Teorema fundamental de la trigonometría que acabamos de usar ¿no?. Podríamos pensar en transformar esa x^2 en un $\sin^2 x$ y …… a ver qué sacamos. Pero en este caso hay que hacer un cambio parecido, pero un poco especial. Probemos con:

$$x = 3\cdot\sin t \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} dx = 3\cdot\cos t\cdot dt \\ \frac{x}{3} = \sin t \qquad \Rightarrow \qquad t = arc\sin\frac{x}{3} \end{cases}$$

Y al sustituir nos queda:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{3\cdot\cos t\cdot dt}{\sqrt{9-(3\cdot\sin t)^2}} = \int \frac{3\cdot\cos t\cdot dt}{\sqrt{9\cdot(1-\sin^2 t)}} = \int \frac{3\cdot\cos t\cdot dt}{3\cdot\sqrt{\cos^2 t}} = \int \frac{\cos t\cdot dt}{\cos t}$$

$$= \int dt = t = arc\sin\frac{x}{3} + Cte$$

Lo que nos ha resuelto el problema de una manera espectacular!!!! Tenéis que fijaros en que el cambio utiliza el hecho de que el 9 sea un cuadrado perfecto. Por eso el cambio es x = 3·sin t. Si en vez de 9 tuviéramos 5, el cambio sería: $x = \sqrt{5}\cdot\sin t$

Hay otro caso bastante parecido, sólo que esta vez lo que hay dentro de la raíz está a la cuarta potencia. Pero podemos hacer algo muy similar a lo anterior…

Calculad una primitiva de la función

$$f(x) = \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}$$

En este caso, como que lo que buscamos es que dentro de la raíz nos aparezca 1-algo^2, lo que hacemos es:

$$x^2 = \sin t \qquad \Rightarrow \qquad 2x \cdot dx = \cos t \cdot dt$$

Y además tenemos que:

$$t = arc \sin x^2$$

Por lo tanto tenemos que:

$$F(x) = \int \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}} = 2 \cdot \int \frac{2x \cdot dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2 \cdot \int \frac{\cos t \cdot dt}{\sqrt{1-sin^2 t}} = 2 \cdot \int \frac{\cos t \cdot dt}{\sqrt{cos^2 t}} = 2 \cdot \int \frac{\cos t \cdot dt}{\cos t}$$
$$= 2 \cdot \int dt = 2 \cdot t + C = 2 \cdot arc \sin x^2 + C$$

Y con esto hemos hecho un buen repaso a las integrales por cambio de variable.