

VALOR ABSOLUTO

Cuando en una función nos encontramos con el valor absoluto, lo primero que tenemos que hacer para poder eliminarlo es darnos cuenta de que el valor absoluto de una cantidad positiva es ella misma, mientras que el valor absoluto de una cantidad negativa es "menos ella misma". Me explico.

Todos tenemos claro que:

$$\begin{aligned} |4| &= 4 \\ |-8| &= 8 \end{aligned}$$

Pero daos cuenta de que lo que hacemos en el segundo caso es:

$$|-8| = -(-8) = 8$$

Es decir. Si "lo de dentro" es positivo, lo dejamos igual. Si "lo de dentro" es negativo, le cambiamos el signo.

Por ejemplo: Supongamos que tenemos:

$$f(x) = |x^2 - 3x + 2|$$

La forma de "eliminar" el valor absoluto es haciendo una función a trozos, pero para eso necesitamos saber cuando es positivo o negativo lo de dentro del valor absoluto. Resolvemos:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, el polinomio lo podemos expresar como:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1) \cdot (x - 2)$$

Y si estudiamos el signo sabemos que será:

$$\begin{aligned} \text{Positivo en: } &(-\infty, 1) \cup (2, \infty) \\ \text{Negativo en: } &(1, 2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función que buscamos estará dividida en tres trozos, el primero y el tercero serán iguales y valdrán "lo de dentro" y en el trozo del medio le cambiaremos el signo. Es decir:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 3x - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Este caso es muy sencillito, pero ilustra el proceso general. A veces, con voluntad de fastidiar, nos encontramos con un valor absoluto que no alcanza a toda la expresión, es decir, mezcla de cosas con y sin valor absoluto. Pues el procedimiento es el mismo. Lo que hay dentro del valor absoluto es lo que analizamos y, si toca, le cambiamos el signo. Por ejemplo:

$$f(x) = x - 5 + |x^2 - 3x + 2|$$

Pues hacemos como antes y tendremos:

$$f(x) = \begin{cases} x - 5 + (x^2 - 3x + 2) & \text{si } x < 1 \\ x - 5 - (x^2 - 3x + 2) & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x - 5 + (x^2 - 3x + 2) & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

Que, si operamos y reordenamos, nos queda:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4x - 7 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

Por último, comentar que "lo de dentro" puede ser tan perro como se quiera y que encontrar la solución de los "puntos de corte" no siempre será tan fácil, pero la metodología es siempre la misma.

Yatá.