RAÍCES DE COMPLEJOS

Para hacer la raíz de un número complejo, a mí lo que más me gusta es pasarlo a forma polar y entonces, operar.

Por ejemplo:

Supongamos que nos piden la raíz cuarta de $z = 8 + 8 \cdot \sqrt{3} \cdot i$, pues lo primero es pasarlo a forma polar:

$$mod\, z = \sqrt{8^2 + (8 \cdot \sqrt{3})^2} = \sqrt{64 + 64 \cdot 3} = \sqrt{64 \cdot 4} = \sqrt{256} = 16$$

$$\arg z = arc \tan \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{8} = arc \tan \sqrt{3} = 60º = \frac{\pi}{3}\, rad$$

Por lo tanto, nuestro número complejo z se puede expresar como:

$$z = 8 + 8 \cdot \sqrt{3} \cdot i = 16_{\pi/3}$$

Ahora ya podemos hacer la raíz cuarta como unos señores. Llamaremos u a la raíz cuarta de z

$$u = \sqrt[4]{z}$$

Ahora hemos de calcular el módulo y los argumentos (sí en plural, en concreto tantos como nos indica el radical, es decir, 4) de u.

$$mod\, u = \sqrt[4]{mod\, z} = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$\arg u = \frac{(\frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi)}{4}, con\ k = 0,1,2,3$$

Ahora ya sólo nos queda calcular los 4 valores que puede tomar arg u, y lo hacemos dando los diferentes valores a k.

Para k=0, entonces $\arg u = \frac{\pi/3}{4} = \frac{\pi}{12}$

Para k=1, entonces $\arg u = \frac{\pi/3 + 2 \cdot \pi}{4} = \frac{\frac{\pi + 6 \cdot \pi}{3}}{4} = \frac{7 \cdot \pi}{12}$

Para k=2, entonces $\arg u = \frac{\pi/3 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{4} = \frac{\frac{\pi + 12 \cdot \pi}{3}}{4} = \frac{13 \cdot \pi}{12}$

Para k =3, entonces $\arg u = \frac{\pi/3 + 3 \cdot 2 \cdot \pi}{4} = \frac{\frac{\pi + 18 \cdot \pi}{3}}{4} = \frac{19 \cdot \pi}{12}$

Por lo tanto, nuestras cuatro soluciones son:

$$u_1 = 2_{\pi/12}$$

$$u_2 = 2_{7\pi/12}$$

$$u_3 = 2_{13\pi/12}$$

$$u_4 = 2_{19\pi/12}$$

Y ya está!!!