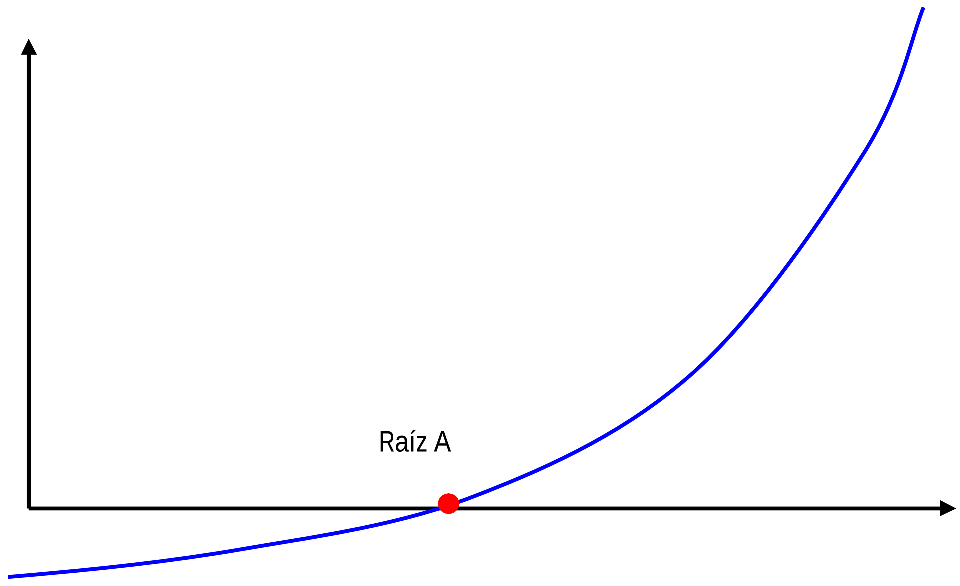
EL MÉTODO DE NEWTON

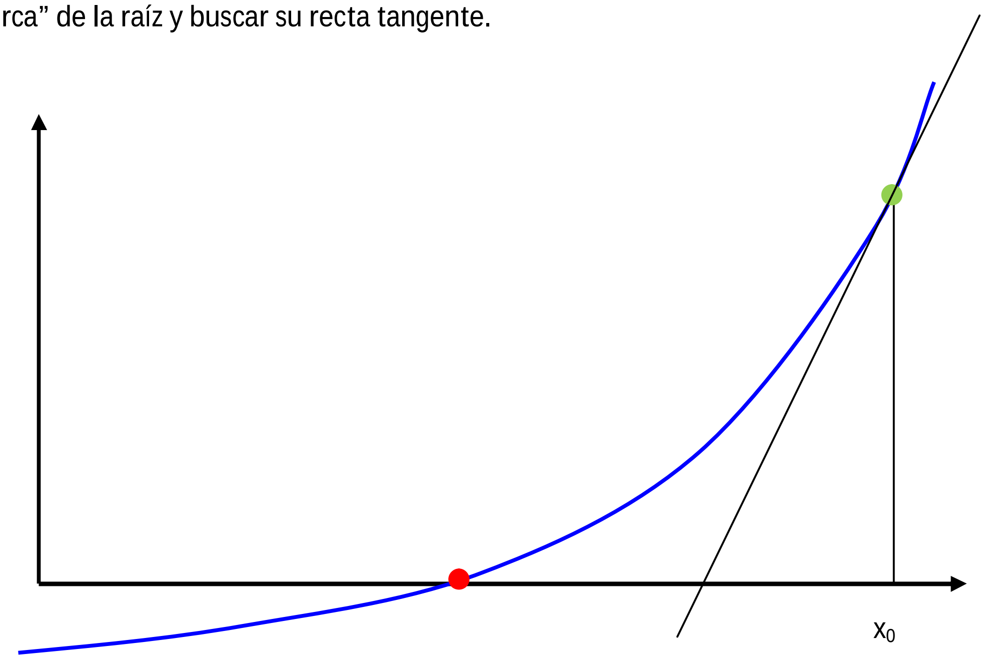
A veces nos podemos encontrar con que hemos de resolver una ecuación y no hay un método de cálculo que nos permita hacerlo. Sí, sabemos muchas técnicas y trucos, pero no podemos resolverlo todo…. Y para eso existe un método numérico en que calculamos una aproximación "todo lo buena que queramos" a base de repetir un proceso e irnos acercando poco a poco a la solución.

El método de Newton consiste en "aproximar" la función utilizando su recta tangente. Ya sé que suena raro, pero en seguida lo explico.

Supongamos que tenemos una función como la que dibujo ahora de la que tenemos su expresión de f(x) pero resulta que es muy complicada y NO sabemos calcular su raíz A (valor de x que cumple f(x) = 0).



El método de Newton consiste en tomar un punto arbitrario x_0 que esté "suficientemente cerca" de la raíz y buscar su recta tangente.



La expresión de la recta tangente sí que la sabemos calcular, es:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

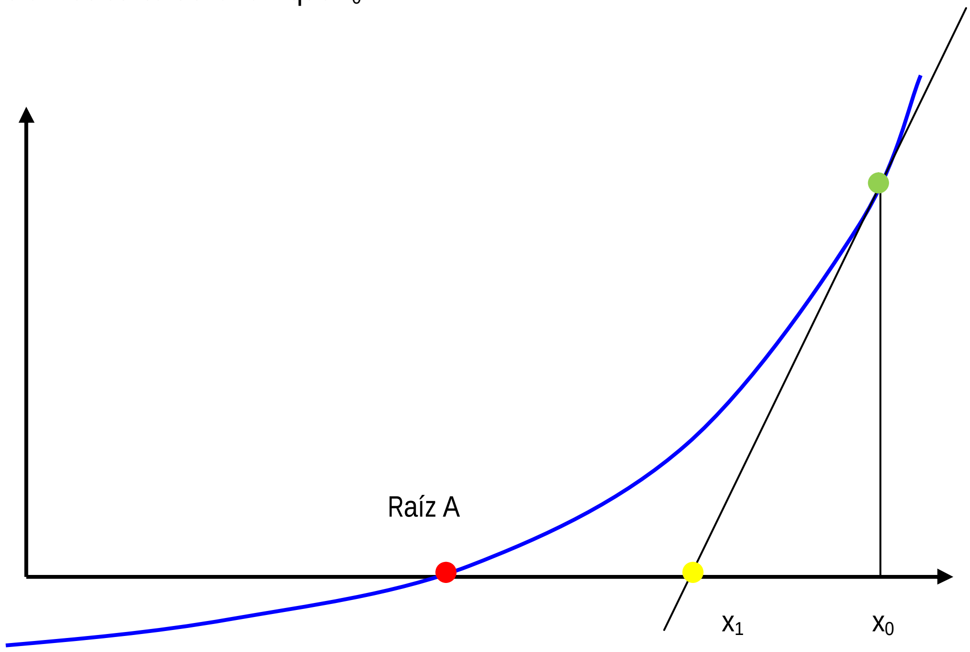
Y si ahora buscamos el punto en el que esta recta corta al eje x resulta que lo que hemos de resolver es para qué valor de x se cumple que:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

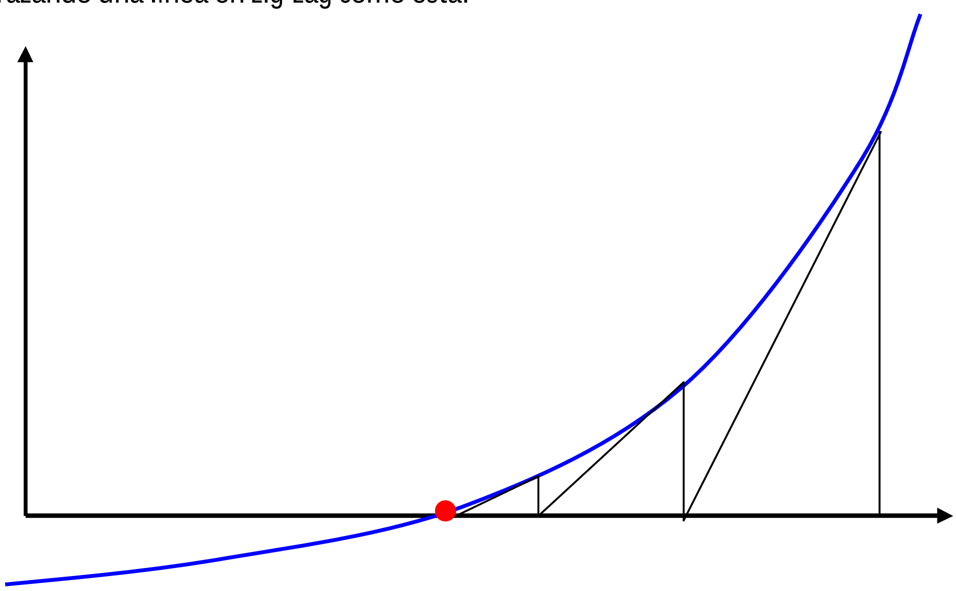
Es decir, que buscamos:

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

A este punto lo llamamos x_1 y resulta que es el que ahora os dibujo en amarillo. No es la raíz, pero está más cerca de la raíz que x_0.

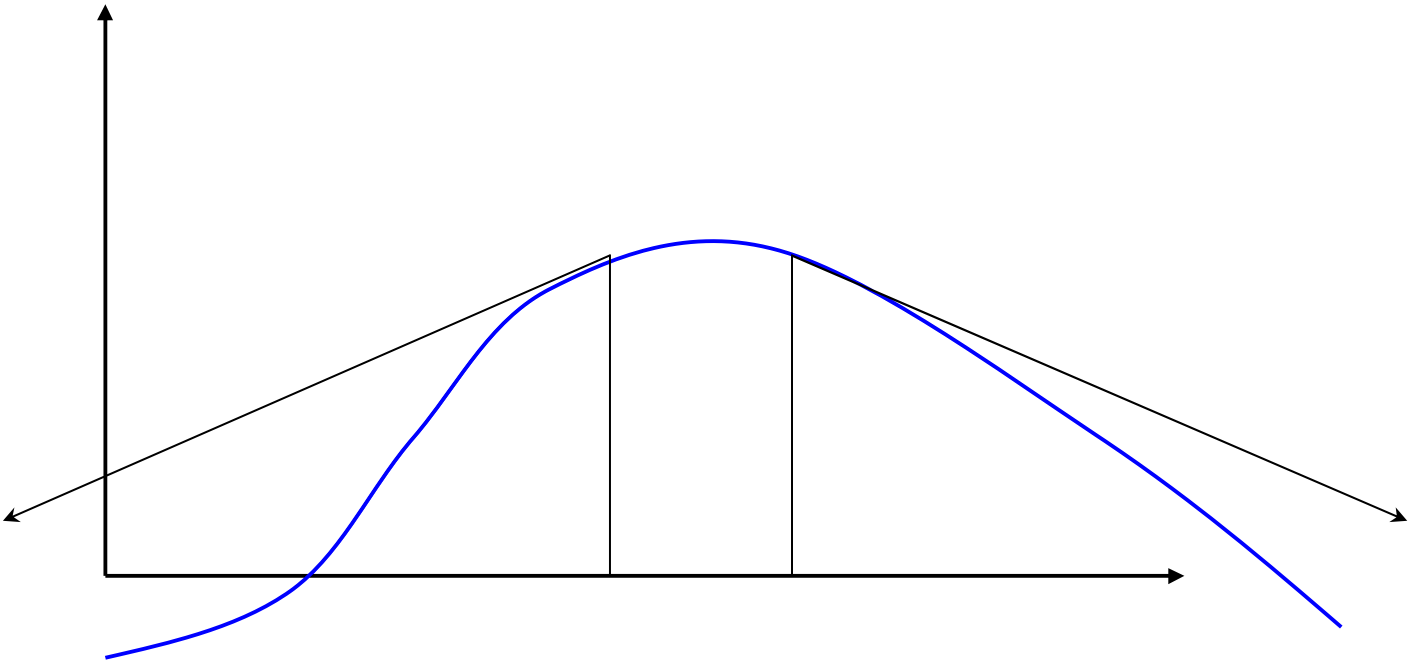


Si ahora vamos repitiendo el proceso, lo que vamos haciendo es acercarnos sucesivamente a la raíz, trazando una línea en zig-zag como ésta:



Y al cabo de unas cuantas iteraciones “atrapamos” la raíz.

Parece maravilloso, y lo es, pero tiene sus inconvenientes. A veces, calcular la derivada puede ser un poco peñazo. Además, ¿qué quiere decir eso de “suficientemente cerca”? Pensad qué nos pasaría en una función como ésta si tomáramos cualquiera de esos dos puntos…



Si nos “alejamos” demasiado de la raíz, en vez de estar cada vez más cerca estaremos cada vez más lejos….

Por lo tanto, mi recomendación es prepararse una tablita (en Excel o cualquier programa que nos permita recalcular con facilidad) y hacer unas cuantas iteraciones. Si no llegamos a un buen resultado, cambiamos el punto inicial.

Os pongo un ejemplo:

Encontrad la solución de:

$$\ln x = \frac{5}{x}$$

Esta ecuación es lo mismo que:

$$x \cdot \ln x - 5 = 0$$

Por lo tanto, nuestra función f(x) ya la tenemos definida:

$$f(x) = x \cdot \ln x - 5$$

Si analizamos un poco la función vemos que:

- Como hay un ln estará definida entre 0 e infinito.

- Como x y ln x son funciones continuas f(x) será continua.
- El valor de f(x) en 1 es f(1) = -5
- El valor de f(x) en 10 es 10·ln 10 – 5 = 18,02585

Por lo tanto, podemos aplicar el teorema de Bolzano y sabemos que la raíz está entre 1 y 10. Por lo tanto, tomamos x_0 = 10 y empezamos a aplicar el método:

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 0 = \ln x + 1$$

Y nos construimos la tabla:

Hago el primer cálculo aparte para que lo veáis, el resto los hace la Excel directamente...

$$x_1 = 10 - \frac{10 \cdot \ln 10 - 5}{\ln 10 + 1} = 10 - \frac{18{,}02585}{3{,}302585} = 4{,}541896$$

Iteración	**x_n**	**$f(x_n)$**	**$f'(x_n)$**	**x_{n+1}**
1	10	18,02585093	3,302585093	4,541896598
2	4,541896598	1,873455044	2,513344678	3,796493447
3	3,796493447	0,064817866	2,334077864	3,768723222
4	3,768723222	0,000101814	2,326736276	3,768679464
5	3,768679464	2,54038E-10	2,326724665	3,768679464
6	3,768679464	0	2,326724665	3,768679464
7	3,768679464	0	2,326724665	3,768679464
8	3,768679464	0	2,326724665	3,768679464

Ya vemos que, a la sexta iteración hemos encontrado la raíz...