EL TEOREMA DEL EMPAREDADO

Aunque mucha gente lo conoce con este nombre, el nombre "oficial" o mejor dicho, "clásico" es el de Principio de Estricción. Así lo llamaba Arquímedes cuando lo utilizó para calcular sus aproximaciones del número π. Varios años (siglos) más tarde el que lo formuló de una manera más rigurosa fue, ¡cómo no!, Gauss. El principio (sin demasiado formalismo) dice así:

Si tenemos un intervalo I, y en el tenemos definidas tres funciones que cumplen que:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

Y además sucede que:

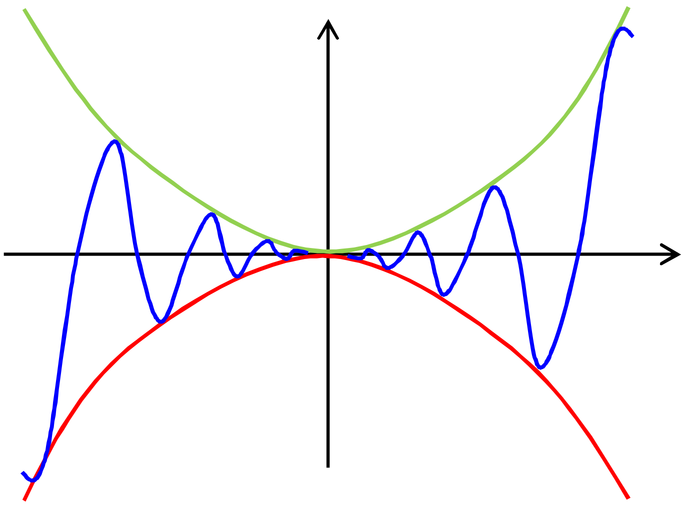
$$\lim_{x \to a} g(x) = A$$
$$\lim_{x \to a} h(x) = A$$

Entonces podemos afirmar que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Vale, de coña, pero… ¿Y esto para qué sirve?

Pues este teorema se utiliza para calcular límites un poco puñeteros o que, a primera vista, no existen. Os cuelgo un dibujito que ayuda a entender lo que vamos a hacer:



Aquí vemos:

- En azul la gráfica de la función $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2 \cdot \sin\left({}^{1}/_{\mathrm{x}}\right)$.
- En verde la gráfica de la función $\mathrm{h(x)} = \mathrm{x}^2$.
- En rojo la gráfica de la función $g(x) = -x^2$.

La función en azul es el "embutido", mientras que la roja y la verde son los "panes" que acotan la otra. La verde se llama función mayorante y la roja función minorante. Y ahora que ya estáis hechos un lío, vamos a calcular un límite usando este teorema.

Por ejemplo, supongamos que tenemos que calcular:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\infty}{\infty} = ?$$

Porque, ¿Cuánto vale $\sin\infty$?. Pues, no lo sabemos. Sabemos que estará entre -1 y 1, pero… no hay quien sepa cuánto vale. Intuitivamente ya se adivina que si el numerador es un número pequeño (su valor absoluto es menor que 1) y el denominador es un número enorme, lo que parece lógico es que tienda a cero, pero… Mucho ojo con los "razonamientos lógicos" cuando el infinito anda cerca!!!. La demostración se hace por el teorema del emparedado. Partimos de que en todo R se cumple que:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

Ahora dividimos todo esto por x con la única condición de que x > 0 (así nos aseguramos de no dividir por 0 y de no tener que cambiar el signo de las desigualdades).

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Y ahora tomamos el límite cuando x tiende a infinito (que podemos hacerlo porque la única limitación que teníamos era x > 0).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$$

Pero al resolver tenemos que:

$$0 \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \leq 0$$

Por lo tanto, por el teorema del emparedado, tenemos que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Y yastá.