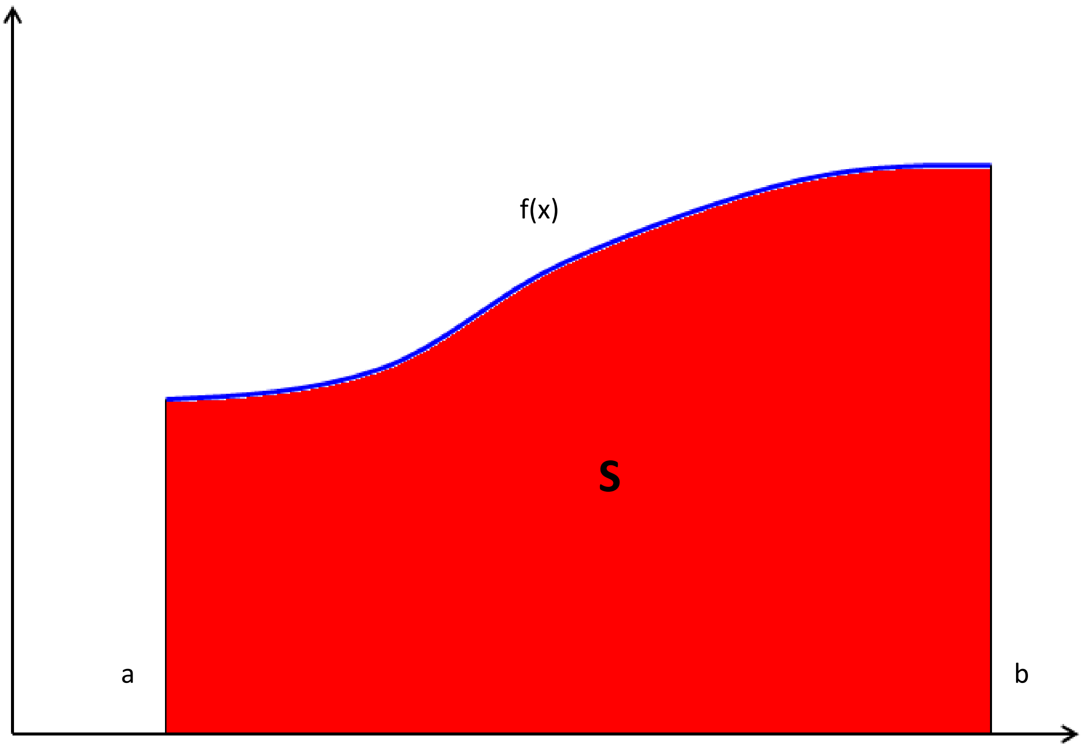
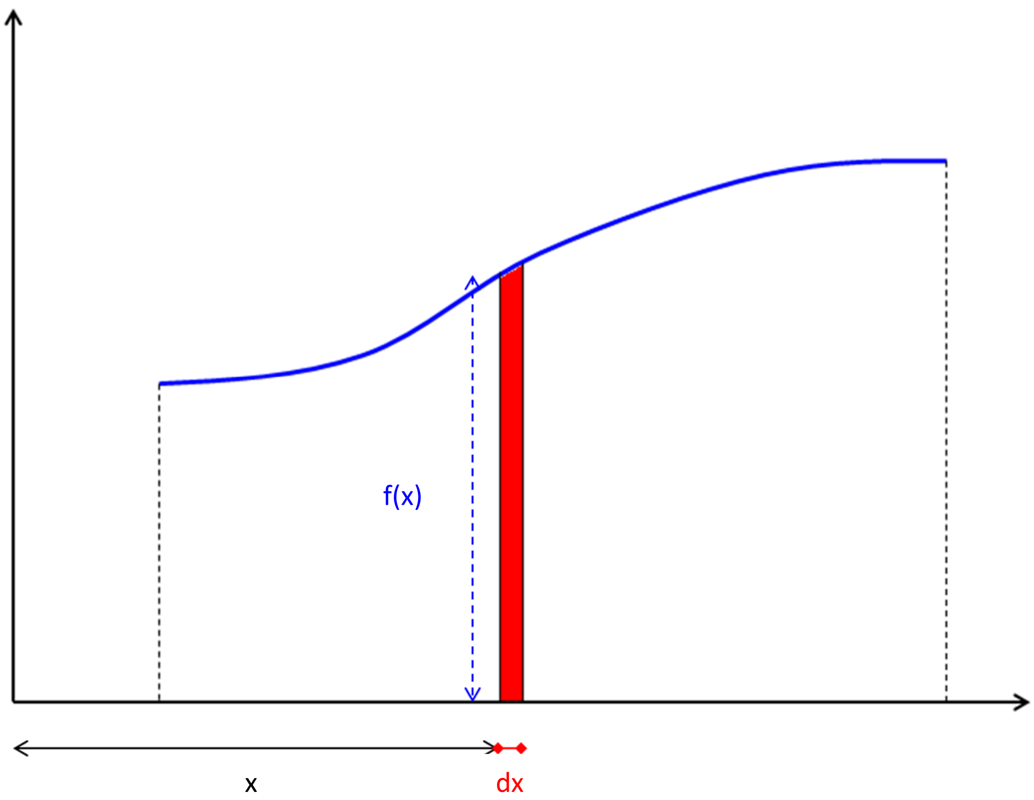
Empezaré recordando que, para calcular el área encerrada por una función en un determinado intervalo [a, b], algo parecido a esto…:



Lo que hacíamos era dividir ese intervalo en "trocitos muy pequeños" y calculábamos la suma de las áreas de los mini-rectangulitos que se nos generaban. Algo parecido a esto:



Por lo tanto, el área del rectángulo se puede aproximar por f(x)·dx y, para encontrar el área bajo la curva, lo que hacemos es “sumar” esas áreas de rectángulos de ancho “muy pequeño” entre los extremos del intervalo, y llegamos a la integral:

$$S = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

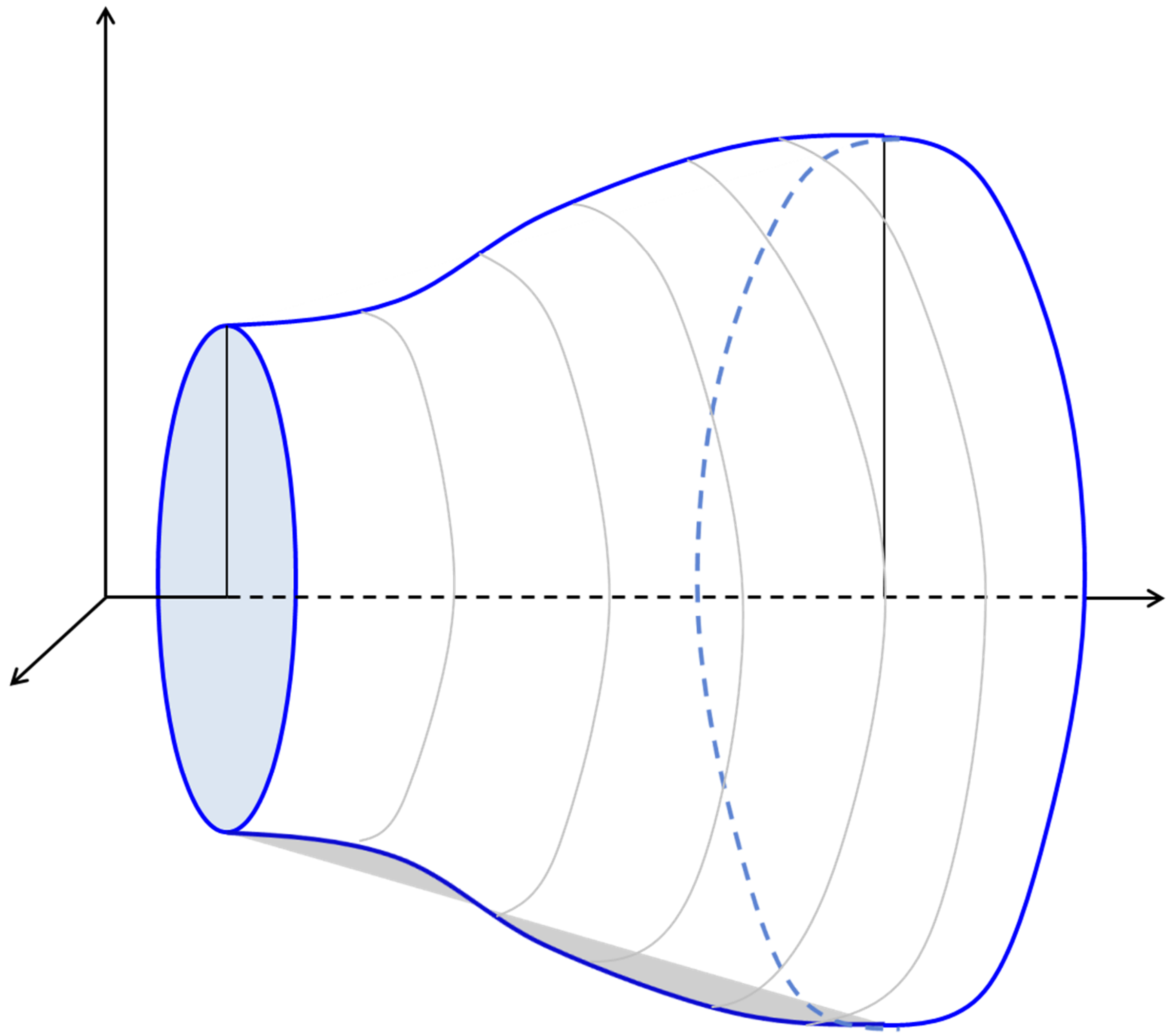
Y este procedimiento se aplica igual para calcular volúmenes, masas, centros de gravedad, momentos de inercia, etc…. Tomamos “trocitos muy pequeños” de lo que sea (los “diferenciales”) y luego sumamos dentro del intervalo (a veces con integrales dobles o triples, que no estudiáis, pero que existen…)

Alguien un poco avispado me dirá que lo que estoy sumando no son exactamente rectángulos ya que la función no es paralela al eje de las x. Y tendrá razón, son una “especie de trapezoides” y no verdaderos rectángulos.

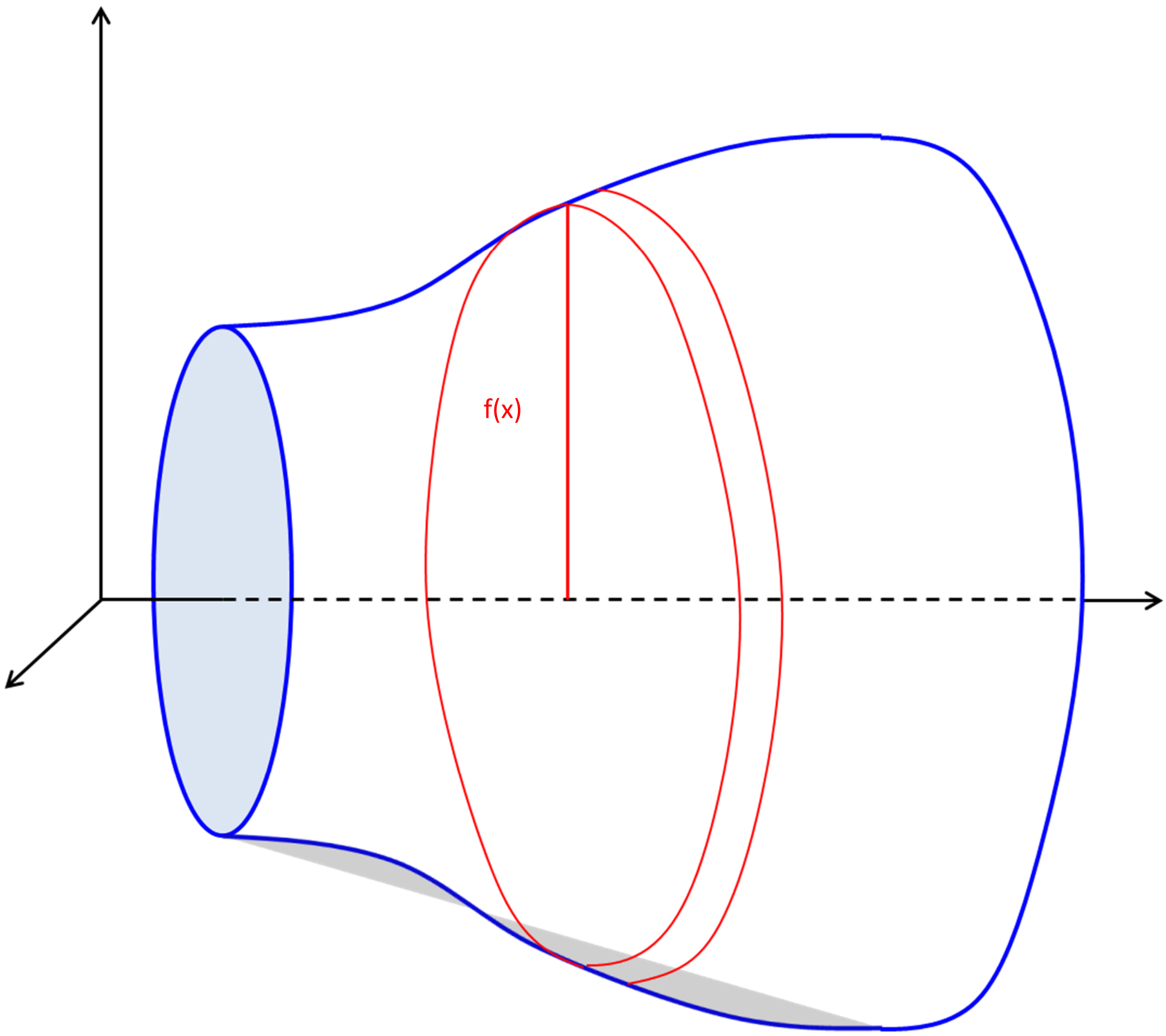
Pero esa es la ventaja de trabajar con esos trozos muy pequeños de los que hablo todo el rato. Son tan pequeños que dx tiende a cero y, como son tan pequeños, podemos hacer esa aproximación porque si intentáramos calcular “de verdad” el área de ese rectángulo tan pequeño nos encontraríamos que la diferencia entre uno y otro es un término que tiene el producto de DOS de estos diferenciales (lo que se llama un diferencial de segundo orden) y, por lo tanto, lo podemos despreciar. Es algo parecido al truco que hacemos al resolver límites del tipo inf / inf, que acabamos “comparando infinitos”…

Y ahora nos metemos de lleno en el tema que nos ocupa. Imaginemos que nuestra función, definida y continua entre a y b, la hacemos girar alrededor del eje x. ¿Qué volumen encierra al girar?.

Bien, lo que nos piden es calcular el volumen de:



Y vamos a aplicar el mismo método. Vamos a cortar esa especie de columna truncada puesta de lado y la vamos a rebanar en trozos muy pequeños, de un ancho dx. Es decir, vamos a hacer lo siguiente:



Y ahora, lo que nos queda es calcular el volumen de ese disco y sumar todos los discos que forman la figura (integrar desde a hasta b).

Lo único que hay que saber es la fórmula del volumen de un cilindro (ya sé que no es exactamente un cilindro, que la generatriz no es paralela al eje de giro…. pero es lo que tiene trabajar con infinitesimales, puedes hacer esa aproximación y te quedas tan ancho. Es lo que os he comentado antes de despreciar los diferenciales de segundo orden”. ¿A que queda bien cuando lo dices?)

Daos cuenta de que el radio de ese cilindro que os he dibujado es precisamente f(x), mientras que el grosor (pequeñito, pequeñito) es precisamente dx.

Ahora, lo que hacemos es aplicar que el volumen de un cilindro es superficie de la base por altura, y, como que la base es un círculo, pues tenemos que el volumen de nuestro disco, que lo llamaremos diferencial de volumen porque se trata de un volumen muuuuy pequeño (os recuerdo que dx es prácticamente cero) vale:

$$dV = Sup.Base \cdot Altura = \ (\pi \cdot r^2) \cdot dx = \ (\pi \cdot (f(x))^2) \cdot dx$$

Y por lo tanto, el volumen que nos piden es:

$$V = \ \int_a^b dV = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 \cdot dx = \ \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \cdot dx$$

Que es la formulita que os quería demostrar.