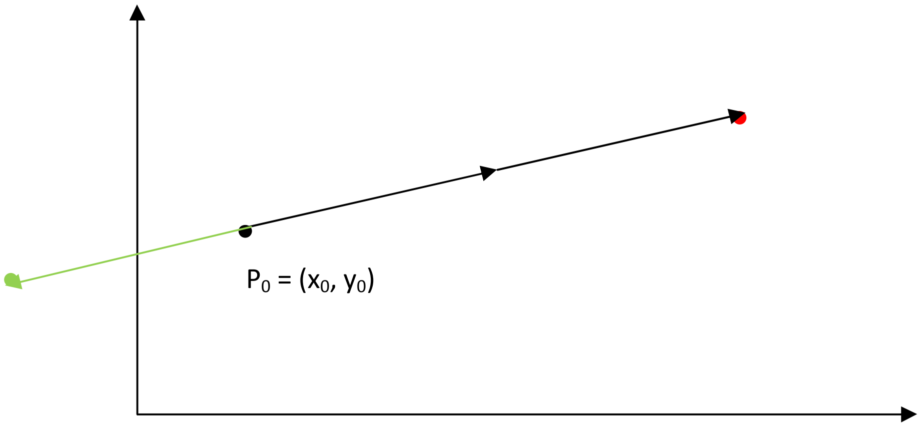
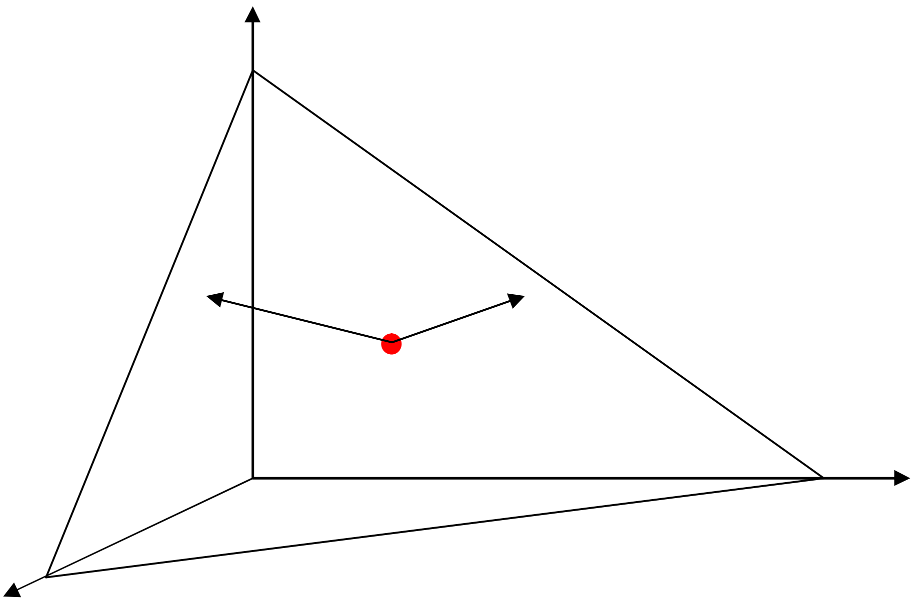
Espero que recordéis la forma en que deducíamos todas las formas de expresar la ecuación de una recta y que partíamos de aquello de "un punto y un vector nos definen una recta". ¿Recordáis este dibujito?



A partir de este esquema, encontrábamos la expresión vectorial, la paramétrica la continua, la explícita y la general de la recta. Esta última era una expresión del tipo:

$$Ax + By + C = 0$$

En el espacio, se puede proceder igual, sólo que tenemos una coordenada más, la z. Además, en el espacio, se puede definir un plano (cosa que en R2 no se podía) y la forma que tienen de hacerlo los matemáticos es diciendo: "Un punto y DOS vectores, nos definen un plano". A partir de ahí, el proceso es muy parecido.



Podríamos empezar planteando la ecuación vectorial del plano, haciendo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Donde expresamos un punto genérico (x,y,z) en función de un punto conocido (que pertenece al plano) y dos vectores directores del plano (de hecho el plano tiene infinitas parejas de vectores directores, pero estamos tomando una en concreto).

Si os fijáis bien, podemos hacer una pequeña artimaña y pasar el "punto conocido" al otro lado, y tenemos que:

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Si ahora "analizamos", vemos que lo que tenemos a la izquierda es la resta de dos puntos del plano, por lo tanto, se trata de un vector genérico del plano. Y además, vemos que lo ponemos como combinación lineal de los dos vectores directores del plano (como debe ser!!!). Si esos tres vectores son uno combinación lineal de los otros dos, entonces seguro que se cumple que:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & v_1 & u_1 \\ y - y_0 & v_2 & u_2 \\ z - z_0 & v_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

Que desarrollándolo nos acaba llevando a una expresión del tipo:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Que es la ecuación general de un plano. ¿Veis el paralelismo con la recta en R^2?. Además, también podemos decir que, en R^3, una ecuación es el equivalente a un plano!!!.

Ya sé que estáis todos con cara de póquer, pero voy a poner un ejemplo y seguro que lo pilláis.

Imaginad que nos piden la ecuación del plano π que pasa por el punto P_0 = (1,1,1) y que tiene como vectores directores los vectores:

$$\vec{v} = (1, 0, -1)) \quad y \qquad \vec{u} = (0, 1, 1)$$

La ecuación vectorial sería:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y al plantear el determinante tendríamos:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & 1 & 0 \\ y - 1 & 0 & 1 \\ z - 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = (x-1) \cdot \big(0 - (-1)\big) - (y-1) \cdot (1-0) + (z-1) \cdot (1-0)$$
$$= x - 1 - y + 1 + z - 1 = x - y + z - 1$$

Por lo tanto, la ecuación general del plano pedido es:

$$x - y + z - 1 = 0$$

Supongamos ahora que nos lo piden al revés, que nos dan esa ecuación y nos piden que hallemos los vectores directores, y que digamos si el punto (1, 1, 1) pertenece al plano.

Pues si partimos de la ecuación, o lo que es lo mismo, de:

$$x - y + z = 1$$

Fijaos que tenemos una ecuación con tres incógnitas, por lo tanto vamos a tener una solución con dos grados de libertad…..es decir, ¡¡¡¡un plano!!!!. Al despejar, tenemos:

$$x = 1 + y - z$$

Llamamos alfa a y y beta a z y la solución que tenemos es:

$$\begin{gathered} x = 1 + \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{gathered}$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con lo que ya tenemos dos vectores directores del plano y un punto del mismo (y que no son los datos de los que había partido en el ejercicio anterior. Ya os he dicho que hay infinitos pares de vectores generadores del plano…). Si queremos obtener los vectores del problema original, en vez de despejar x tendríamos que haber despejado z y tendríamos:

$$z = 1 + y - x$$

Y el equivalente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pero las dos soluciones son buenas…. Por último, si nos piden comprobar si (1,1,1) pertenece al plano, es muy sencillo. Sólo hay que comprobar si cumple la ecuación del plano, es decir:

$$1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

Por lo tanto, pertenece al plano.

Así que, una ecuación del tipo Ax+By+Cz+D =0 es la ecuación de un plano. Muchas veces nos definirán una recta con dos ecuaciones de este tipo. Pero es lógico. Dos planos (generalmente) se cortan según una recta. Pensadlo. Tenemos 2 ecuaciones con 3 incógnitas, por lo tanto (si no hay sorpresas) el sistema tendrá 1 grado de libertad…., es decir, será una recta!!!.

Por ejemplo, nos definen una recta como:

$$\begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

¿Qué recta es? ¿Cuál es su vector director? Dad un punto de la recta…

Pues si empezamos a resolver el sistema, de la segunda ecuación tenemos que:

$$x = 1 - 2z$$

Y al sustituir en la primera tenemos que:

$$2 \cdot (1 - 2z) + y - z + 3 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y - 5z + 5 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -5 + 5z$$

Por lo tanto, la solución a nuestro sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El vector director es el (-2, 5, 1) y um punto de la recta es el (1, -5, 0).

Ya para terminar. Supongamos que tenemos dos puntos del plano Ax+By+Cz+D = 0, P y Q. Como que los dos pertenecen al plano, los dos cumplirán la ecuación, es decir, se cumplirá que:

$$A \cdot P_x + B \cdot P_y + C \cdot P_z + D = 0$$

$$A \cdot Q_x + B \cdot Q_y + C \cdot Q_z + D = 0$$

Si restamos ambas ecuaciones tenemos que:

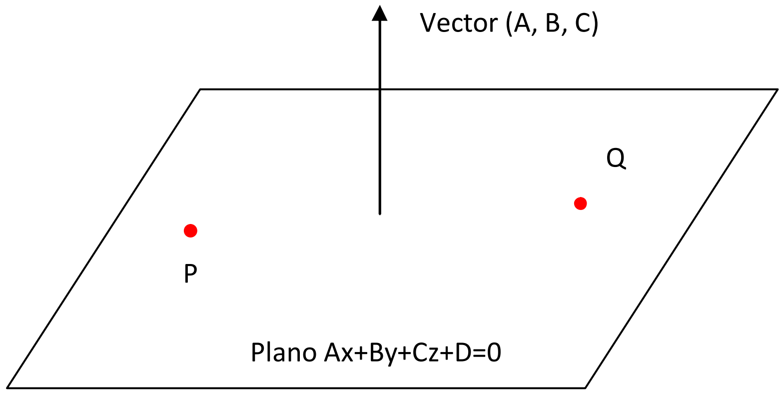
$$A \cdot P_x + B \cdot P_y + C \cdot P_z - \left(A \cdot Q_x + B \cdot Q_y + C \cdot Q_z\right) = 0$$

Si reordenamos, tenemos que:

$$A \cdot (P_x - Q_x) + B \cdot \left(P_y - Q_y\right) + C \cdot (P_z - Q_z) = 0$$

Y ahora, pensemos un poco. P-Q es la resta de dos puntos CUALQUIERA del plano, por lo tanto, será un vector cualquiera del plano. Esa ecuación nos dice que al multiplicar un vector cualquiera del plano por el vector (A,B,C) nos da 0. Por lo tanto, nos está diciendo que el vector (A,B,C) es un vector perpendicular al plano.

Por lo tanto, sea como sea la fórmula del plano, valgan lo que valgan los números A, B y C, sabemos que:



Y esto es muy útil cuando nos piden la recta perpendicular al plano, porque ya sabemos el vector director de la recta.