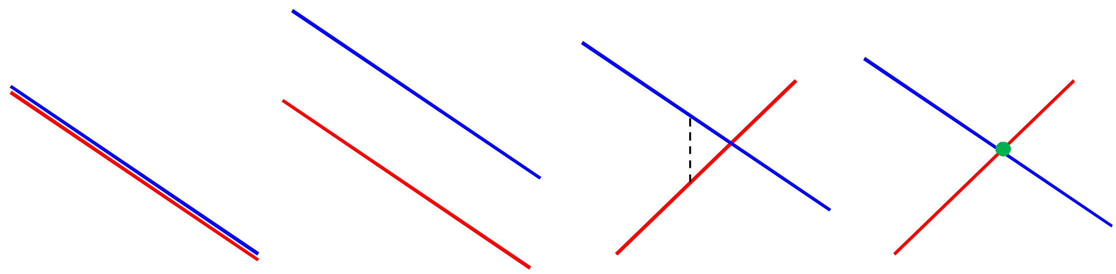
POSICIONES RELATIVAS

En muchos problemas de Álgebra se pide estudiar la posición relativa en el espacio de dos rectas, dos planos, una recta y un plano, etc…y suelen generar no pocos quebraderos de cabeza, así que vamos a hacer un repasillo de todos ellos.

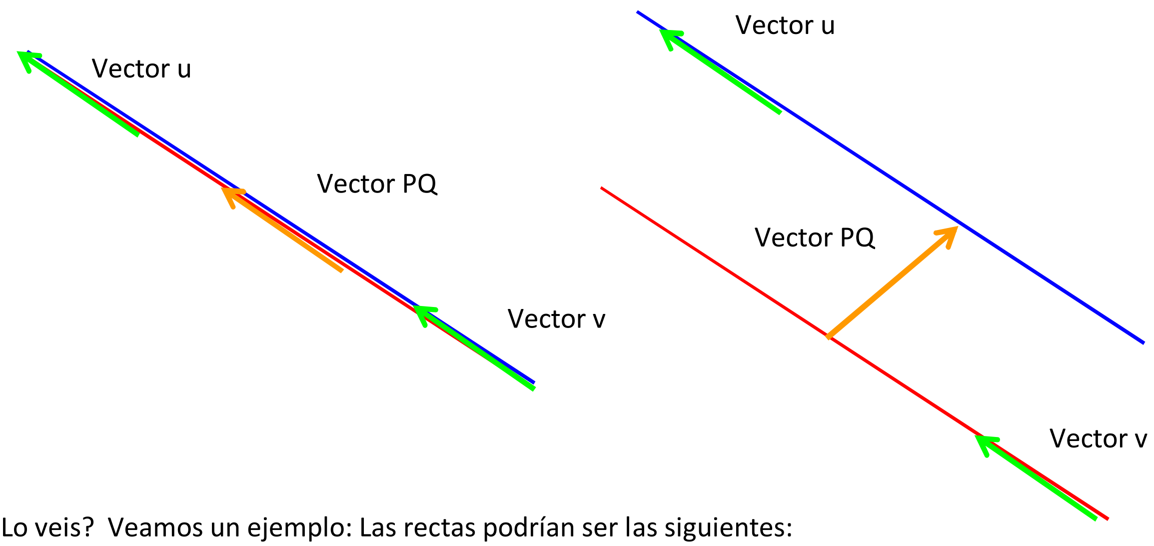
Posiciones relativas de dos rectas.

Empecemos con dos rectas. Ya sabemos que cada una de ellas se nos define mediante un punto y un vector. ¿Qué casos podemos encontrar? A ver si soy capaz de dibujarlo un poco decentemente…



Coinciden Paralelas Se cruzan Se cortan

Los dos primeros casos son muy fáciles de ver ya que en ambos casos los vectores directores de ambas rectas u y v son paralelos, es decir, son proporcionales. La diferencia entre un caso y el otro también es muy sencilla de ver. Si cogemos el punto P de una recta y el punto Q de la otra y los restamos, obtenemos un nuevo vector PQ que, en el caso de rectas coincidentes, también será proporcional, mientras que en el caso de las rectas paralelas no tendrá nada que ver….



¿Lo veis? Veamos un ejemplo: Las rectas podrían ser las siguientes:

$$recta\ r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$recta\ s: \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-4}$$

Pongo dos formas diferentes para que os vayáis acostumbrando ¿vale?. El caso es que los dos vectores directores son:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Donde ya vemos que se cumple que:

$$\vec{v} = -2 \cdot \vec{u}$$

Por lo tanto, ya sabemos que son o paralelas o coincidentes…. Veamos el tema de los puntos….Los puntos P y Q son respectivamente:

$$P = (1, 0, 2) \quad y \quad Q = (2, -1, 2)$$

Por lo tanto el vector PQ será:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{(Q-P)} = (2, -1, 2) - (1, 0, 2) = (1, -1, 0)$$

Este vector NO ES PROPORCIONAL a los otros dos, por lo tanto, nos encontramos ante dos rectas paralelas. Si la recta s hubiera sido:

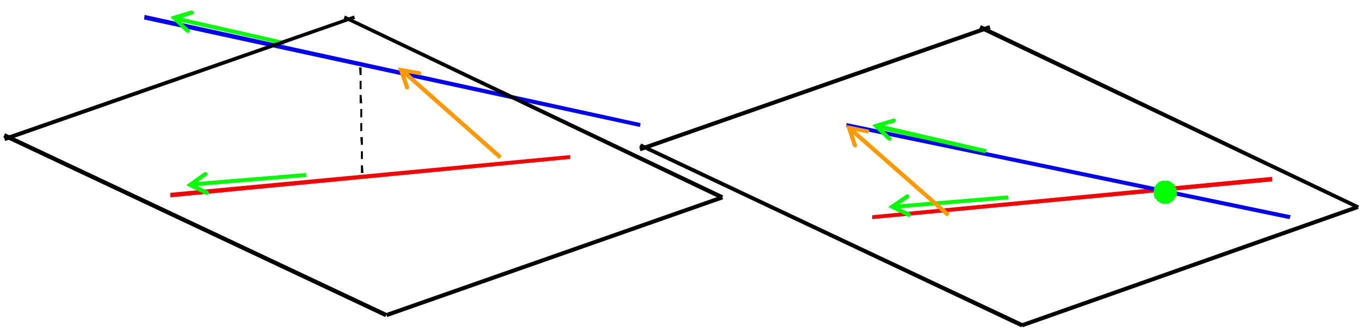
$$recta\ s: \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-4}$$

En este caso el vector PQ quedaría como:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{(Q-P)} = (2, -1, 4) - (1, 0, 2) = (1, -1, 2)$$

Y entonces serían rectas coincidentes. ¿Lo veis?

Ahora nos falta ver los otros dos casos, las rectas que se cruzan o se cortan. En este caso, los dos vectores NO son proporcionales y ambas rectas tienen direcciones diferentes, pero… ¿cómo se distingue una de otra? Pues es bien sencillo. Hacemos como antes, es decir, tomamos el vector PQ y….Si las rectas se cortan, quiere decir que están en el mismo plano y por lo tanto los vectores u, v y PQ serán coplanarios, es decir, serán linealmente dependientes, mientras que si se cruzan en el espacio, los tres vectores NO serán coplanarios y serán linealmente independientes. ¿Cómo vemos eso? Pues haciendo el determinante de los tres vectores. Si sale 0, se cortan, si no, se cruzan.



Veamos otro ejemplo:

$$recta\ r\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$recta\ s\colon \frac{-x+2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$$

Los vectores son:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y aquí os he tendido una trampa. ¿Veis la primera componente del vector v? ¿Cómo es que he puesto -2 si en la ecuación pone 2?. La respuesta la tenéis si miráis el numerador. Ha de ser siempre de la forma “x-a”. Como que yo he puesto “-x+a” hay que multiplicar por -1 arriba y abajo. Es para que no os pillen el día del examen…..

Pues bien, esos dos vectores NO son proporcionales, por lo que nos encontramos en uno de estos dos casos. ¿En cuál? Pues hemos de buscar PQ y hacer un determinante…..

$$P = (1,0,2) \quad y \quad Q = (2,-1,2)$$

Ojo con la componente x de Q, recordad que hemos multiplicado arriba y abajo por -1….. Por lo tanto:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{(Q-P)} = (2,-1,2) - (1,0,2) = (1,-1,0)$$

Y ahora hacemos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 \cdot 0 - (-1) \cdot 1) - (-1) \cdot \big((-2) \cdot 0 - 1 \cdot 1\big) + 2 \cdot \big((-2) \cdot (-1) - 1 \cdot 3\big)$$
$$= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) = 1 - 1 - 2 = -2$$

Por lo tanto se cruzan en el espacio.

¿Qué habría pasado si la recta s fuera la siguiente?

$$recta\ s\colon \frac{-x+2}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{1}$$

Pues que tendríamos los siguientes vectores:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y al calcular PQ tendríamos:

$$P = (1,0,2) \quad y \quad Q = (0,-2,-1)$$

Y por lo tanto…

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{(Q-P)} = (2,-2,-1) - (1,0,2) = (1,-2,-3)$$

Ahora hacemos el determinante y…

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 \cdot (-3) - (-2) \cdot 1) - (-1) \cdot \big((-2) \cdot (-3) - 1 \cdot 1\big) + 2 \cdot \big((-2) \cdot (-2) - 1 \cdot 3\big) = 1 \cdot (-7) + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = -7 + 5 + 2 = 0$$

Por lo tanto, se cortan en un punto. Ahora bien ¿en cuál? Pues es bien sencillo. Si ponemos las dos rectas en su forma continua tenemos:

$$recta\ r: \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{2}$$
$$recta\ s: \quad \frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{1}$$

Que si las desarrollamos dos a dos (multiplicando en cruz) nos queda el sistema:

$$\begin{matrix} -x+1=y \\ 2y=-z+2 \\ 3x-6=-2y-4 \\ y+2=3z+3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x+y=1 \\ 2y+z=2 \\ 3x+2y=2 \\ y-3z=1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Si intercambio la cuarta y la segunda (por comodidad) e introduzco un cero en la tercera, me queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora meto ceros en la segunda columna y…

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Las dos últimas ecuaciones nos aportan el mismo dato (son proporcionales) que es z=0. Si ahora vamos sustituyendo hacia arriba tenemos:

$$y - 3 \cdot 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

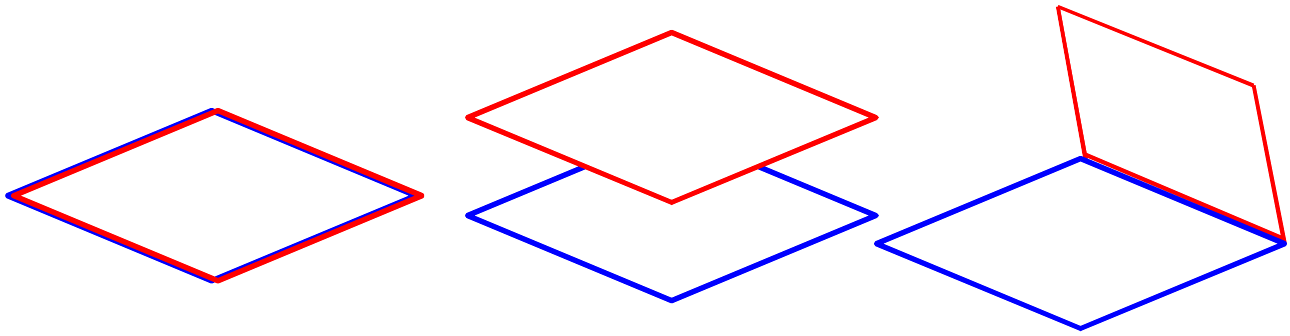
Y al sustituir en la de arriba tenemos:

$$x + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

El punto de corte de las dos rectas es el (0, 1, 0).

Posiciones relativas de dos planos.

Este caso es más sencillo, ya que sólo hay tres posibilidades. O son coincidentes, o son paralelos o se cortan según una recta.



Para estudiar los distintos casos hacemos uso de la propiedad que nos dice que, si nos dan un plano en la forma Ax + By + Cz + D = 0, entonces el vector (A, B, C) es perpendicular la plano. Así pues, en los dos primeros casos los vectores perpendiculares (es decir, los vectores (A, B, C) de cada plano) serán proporcionales (es decir paralelos), mientras que en el último caso no tendrán nada que ver.

¿Y cómo se distingue el primer caso del segundo (coincidentes o paralelos)? Pues si el término D también es proporcional, entonces son el mismo plano, y si no, son paralelos. Es decir:

Si nos dan dos planos:

$$\pi_1 = Ax + By + Cz + D = 0$$
$$\pi_2 = A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

Entonces:

$$Si \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} = \dfrac{D}{D'} \quad \Rightarrow \quad Coinciden \\ \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{D}{D'} \quad \Rightarrow \quad Son\ paralelos \end{cases} \\ !\left(\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'}\right) \quad \Rightarrow \quad Se\ cortan\ según\ una\ recta \end{cases}$$

Veamos un ejemplo de cada. Supongamos que nos dan los planos:

$$\pi_1: \quad x - 4y + 3z = 5$$
$$\pi_2: \quad 2x + 2y - 4z = 0$$

Los vectores (1, -4, 3) y (2, 2, -4) no tienen nada que ver, por lo tanto, se cortan según una recta. ¿Cuál? Pues resolvamos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 10 & -10 & -10 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

De la segunda sacamos que:

$$y - z = -1 \qquad \Rightarrow \qquad y = -1 + z$$

Y al sustituir en la de arriba tenemos:

$$x - 4 \cdot (z - 1) + 3z = 5 \qquad \Rightarrow \qquad x - 4z + 4 + 3z = 5 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1 + z$$

Por lo tanto la recta es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$$

Si, por ejemplo, tenemos los planos:

$$\begin{aligned} \pi_1: &\quad x - 2y + 3z = 5 \\ \pi_2: &\quad 2x - 4y + 6z = 0 \end{aligned}$$

En este caso, los vectores (1, -2, 3) y (2, -4, 6) son proporcionales, pero el término independiente no, por lo tanto, son dos planos paralelos.

Por último, si nos dan los planos:

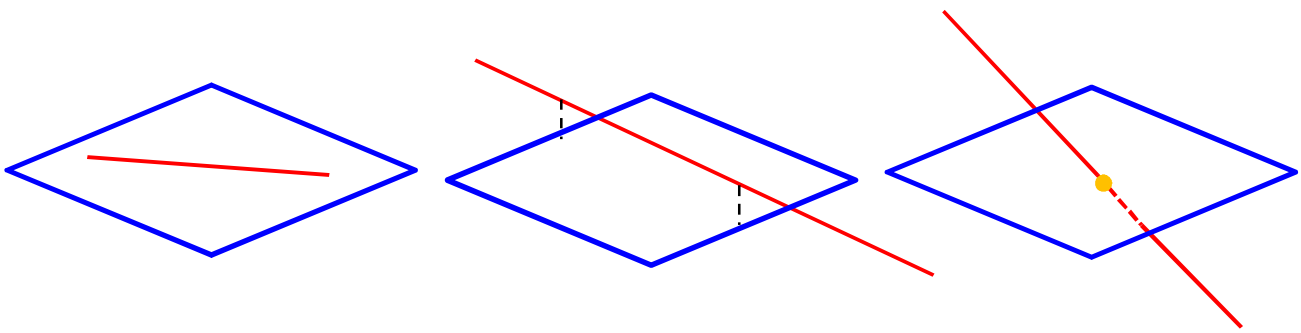
$$\begin{aligned} \pi_1: &\quad x - 2y + 3z = 5 \\ \pi_2: &\quad 2x - 4y + 6z = 10 \end{aligned}$$

Aquí todos los coeficientes son proporcionales, por lo que se trata del mismo plano que se ha puesto un disfraz….

Quiero abrir un paréntesis sobre el caso de que se corten según una recta. Y es que muchas veces nos definirán una recta dándonos dos planos. No pasa nada, ya sabemos calcular el punto y el vector, por lo tanto, no hay problema, sólo lo hacen para liarnos…. Y cierro el paréntesis.

Posición relativa de recta y plano.

Aquí también pueden pasar 3 cosas: O la recta está contenida en el plano, o es paralela al plano o recta y plano se cortan.



Voy a suponer que nos dan la recta y el plano en su forma vectorial, es decir, que tenemos:

$$recta\ r:\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{0,r} \\ y_{0,r} \\ z_{0,r} \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$plano\ \pi:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{0,p} \\ y_{0,p} \\ z_{0,p} \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Así identificamos claramente los puntos de la recta y del plano así como el vector de la recta y los vectores del plano. Pues bien, pasa como siempre. Los dos primeros casos implican que el vector de la recta y los dos vectores del plano son coplanarios, es decir, que su determinante es cero:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ahora sólo nos queda saber cuándo la recta está contenida en el plano y cuándo es paralela. Pero aquí hacemos algo parecido a lo que hacíamos en la posición relativa de dos rectas. Tomamos el vector que une los dos puntos, el de la recta y el del plano, vector PQ. Si este vector es coplanario con los dos vectores del plano entonces la recta está contenida en el plano. Si no, es que son paralelas. Es decir, que calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} PQ_x & PQ_y & PQ_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad = \quad \begin{cases} = 0 & está\ contenida \\ \neq 0 & son\ paralelos \end{cases}$$

Y el último caso es sencillamente cuando el primer determinante es distinto de cero. Se cortan si:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

De todos modos, no suelen darte nunca así ni la recta ni el plano. Generalmente se utiliza la forma continua de la recta y la explícita del plano, es decir:

$$recta\ r:\quad \frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

$$plano\ \pi:\ Ax + By + Cz + D = 0$$

Entonces aquí se utiliza el truco de que (A, B, C) es perpendicular al plano. Si la recta es paralela al plano o está contenida en él, el vector de la recta es coplanario con todos los vectores del plano y, por lo tanto, (A, B, C), que es perpendicular a todos los vectores del plano, también será perpendicular al vector de la recta. Por lo tanto, si el producto escalar de los dos vectores (A, B, C) y el de la recta es 0, estaremos ante uno de esos dos casos, es decir, si:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0$$

Estaremos en uno de los dos primeros casos. ¿Cómo sabemos en cuál? Pues una manera de comprobarlo es tomando el punto de la recta y mirando si cumple la ecuación del plano. Si la cumple, entonces toda la recta está contenida en el plano. Si no, es que son paralelos.

Igualmente, si se cumple que:

$$(A \quad B \quad C) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \neq 0$$

Entonces la recta y el plano se cortan en un punto.

Por último, recordad que, a veces, os darán la recta como intersección de dos planos. No es ningún problema. Tenéis las ecuaciones de tres planos y tenéis tres incógnitas. Resolved el sistema y punto. Las tres posibilidades son:

$$Sistema\ Compatible\ Determinado \quad \Rightarrow \quad Se\ cortan\ en\ el\ punto\ solución$$
$$Sistema\ Compatible\ Indeterminado \quad \Rightarrow \quad La\ solución\ es\ una\ recta\ (está\ contenida)$$
$$Sistema\ Incompatible \quad \Rightarrow \quad No\ hay\ puntos\ en\ común\ (la\ recta\ es\ paralela\ a\ l\ plano)$$

Vamos a ver algún ejemplo. Supongamos que nos dan:

$$recta\ r: \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1}$$
$$plano\ \pi: \quad 2x + 2y + 2z + 3 = 0$$

Hacemos el producto escalar y tenemos:

$$(2 \quad 2 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 2 - 4 + 2 = 0$$

Por lo tanto, o está contenida o son paralelos. Sustituimos el punto de la recta en la ecuación del plano:

$$2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 = 4 + 2 - 2 + 3 = 7 \neq 0$$

Por lo tanto, son paralelos.

Supongamos que nos dan:

$$recta\ r: \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1}$$
$$plano\ \pi: \quad 2x + 2y - 2z + 3 = 0$$

Hacemos el producto escalar y tenemos:

$$(2 \quad 2 \quad -2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 = 2 - 4 - 2 = -4 \neq 0$$

Por lo tanto, se cortan en un punto. ¿en cuál? Pues modificamos la expresión de la recta y la ponemos como dos igualdades (multiplicando en cruz) y tenemos:

$$\begin{array}{l} recta\ r\!: \begin{cases} -2x+4=y-1 \\ y-1=\ -2z-2 \end{cases} \\ plano\ \pi\!:\ \ 2x+2y-2z+3=0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 2x+y=3 \\ y+2z=\ -1 \\ 2x+2y-2z=\ -3 \end{cases}$$

Y ahora resuelvo el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Y de aquí obtenemos que:

$$x=\frac{13}{4} \quad y=\frac{-14}{4} \quad z=\frac{5}{4}$$

Que da unos números tan feos porque el problema me lo he inventado yo….

Aquí abro un paréntesis parecido al anterior. Supongamos que nos piden que encontremos el plano perpendicular a la recta r anterior y que pasa por (1, 1, 3). ¿Cómo se hace?

Pues bien, como tenemos el vector de la recta (1, -2, 1) ya sabemos A, B y C. Por lo tanto el plano será de la forma:

$$x-2y+z+D=0$$

Lo único que nos falta es encontrar D, pero como el punto (1, 1, 1) ha de pertenecer al plano, entonces cumplirá la ecuación del plano, por lo tanto:

$$1-2\cdot 1+3+D=0 \qquad \Rightarrow \qquad D=-2$$

Y el plano es:

$$x-2y+z-2=0$$

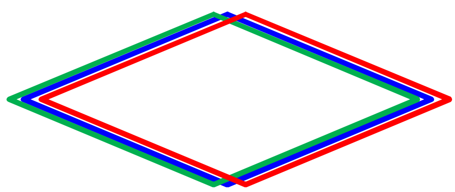
Y cierro el paréntesis.

Posiciones relativas de 3 planos.

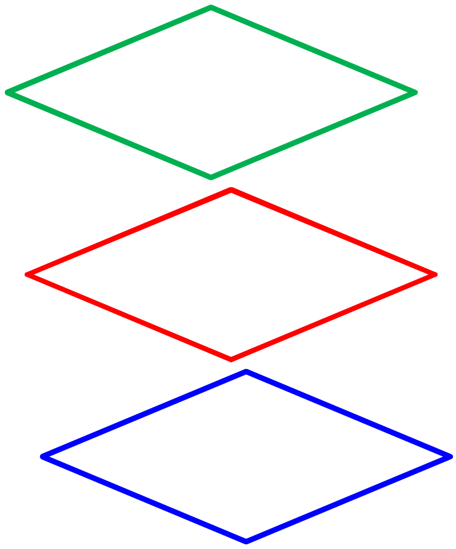
La verdad es que este caso suele aparecer poco. Como mucho se estudia como una versión del anterior en el que la recta te la dan como intersección de dos planos, pero…. en una PAC salió y me parece interesante comentar las muchas posibilidades que encierra esta posibilidad. Ánimo, no desesperéis que ya estamos acabando.

Las posibilidades que hay con tres planos son las siguientes:

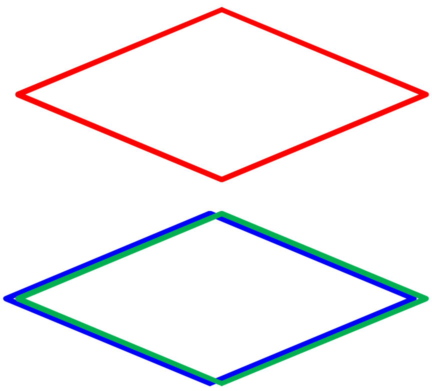
Los tres planos coinciden: No tiene mucha historia. Ya sabéis cómo saber si los planos son el mismo….Hay infinitas soluciones con dos grados de libertad.



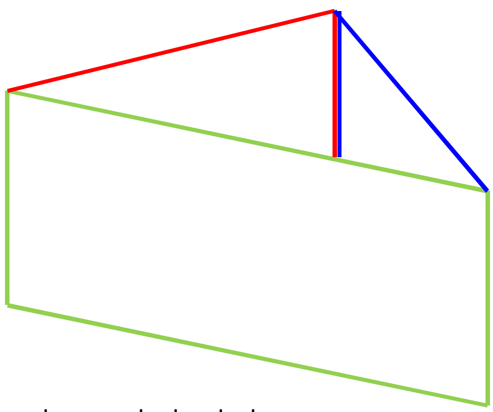
Los tres planos son paralelos: También es trivial. Ya sabéis identificar planos paralelos. No hay solución.



Dos planos coinciden y el otro es paralelo: Tampoco tiene mucho rollo. Ya sabéis identificar un plano paralelo a otro (o a otros dos). No hay solución.

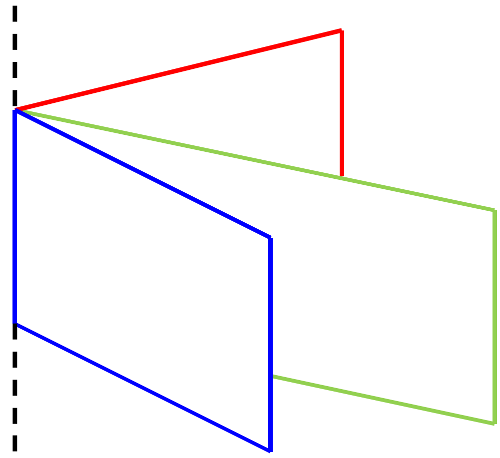


Los planos se cortan 2 a 2 según rectas paralelas (algunos lo llaman superficie prismática triangular): Este ya tiene más rollo. El sistema no tiene solución, sin embargo los coeficientes A, B, C de los tres planos, no son proporcionales en ningún caso. Sería algo parecido a:

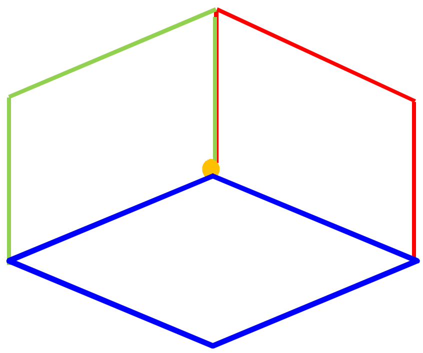


Otra forma de verlo es calculando las tres rectas que resultan de la intersección de los tres planos dos a dos y mirando sus vectores directores. Son paralelos.

Los planos se cortan en una recta: También se le llama haz de planos. El sistema es compatible indeterminado con un único grado de libertad. Es algo parecido a:



Por último nos quedaría el caso compatible determinado. Los tres planos se cortan en un punto. Es fácil de ver:



Pongo ejemplos sólo de los tres últimos ¿OK?. El caso del prisma triangular sería algo parecido a éste:

$$\begin{cases} Plano\ \pi_1: x + y + z - 2 = 0 \\ Plano\ \pi_2:\ 2x - 2y + z + 2 = 0 \\ Plano\ \pi_3: 2x + 10y + 4z - 11 = 0 \end{cases}$$

Nos lo ponemos como un sistema de ecuaciones y resolvemos. La matriz que obtenemos es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -6 \\ 0 & 8 & 2 & 7 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Claramente tenemos un sistema incompatible. Al mirar los coeficientes A, B, C de los planos vemos que no son proporcionales, por lo tanto es el caso del prisma. Para verlo calcularé primero dos rectas. La intersección de los dos primeros planos y la intersección de los dos últimos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

De la segunda ecuación sacamos que:

$$z = 6 - 4y$$

Sustituyendo en la primera tenemos que:

$$x + y + (6 - 4y) = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x = -4 + 3y$$

Por lo tanto nuestra recta es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Veamos el otro par:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 12 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

De la segunda tenemos:

$$3z = 13 - 12y \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{13}{3} - 4y$$

Al sustituir en la primera nos queda:

$$2x - 2y + \left(\frac{13}{3} - 4y\right) = -2 \qquad \Rightarrow \qquad 2x = -2 - \frac{13}{3} + 6y \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{-19}{3} + 3y$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-19}{3} \\ 0 \\ \frac{13}{3} \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ya vemos que las dos rectas son paralelas. Sólo nos queda comprobar la otra recta, la que sale de la intersección del primer y tercer plano:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

De la segunda sacamos que:

$$8y + 2z = 7 \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{7}{2} - 4y$$

Al sustituir en la primera tenemos que:

$$x + y + \left(\frac{7}{2} - 4y\right) = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{11}{2} + 3y$$

Por lo que tenemos que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-11}{2} \\ 0 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Y volvemos a encontrar el mismo vector, por lo que las tres rectas son paralelas.

El caso del haz de planos sería algo como:

$$\begin{cases} Plano\ \pi_1: x + y + z - 2 = 0 \\ Plano\ \pi_2:\ 2x + 3y + z - 3 = 0 \\ Plano\ \pi_3: 7x + 10y + 4z - 11 = 0 \end{cases}$$

Ponemos la matriz equivalente y empezamos a resolver:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, nos queda un sistema compatible indeterminado con un grado de libertad (es decir, una recta). De la segunda ecuación sacamos que:

$$y - z = -1 \qquad \Rightarrow \qquad y = z + 1$$

Sustituimos en la primera y tenemos:

$$x + (z + 1) + z = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1 - 2z$$

Por lo tanto la recta es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por último, el caso de que se corten en un punto sería un sistema compatible determinado cualquiera. Por ejemplo:

$$\begin{cases} Plano\ \pi_1: x + y + z - 2 = 0 \\ Plano\ \pi_2:\ 2x - 1y + z + 1 = 0 \\ Plano\ \pi_3: 3x + 10y + 4z - 11 = 0 \end{cases}$$

Al resolver tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Como que 3 y 7 son primos entre sí, lo que haremos será sustituir la tercera fila por 3·F3+7·F2, de manera que nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -20 \end{pmatrix}$$

De la tercera sacamos que:

$$z = \frac{-20}{-4} = 5$$

Al sustituir en la segunda tenemos que:

$$-3 \cdot y - 1 \cdot 5 = -5 \qquad \Rightarrow \qquad -3y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = 0$$

Y al sustituir estos dos valores en la primera tenemos:

$$x + 0 + 5 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x = -3$$

Por lo tanto los tres planos se cortan en el punto (-3, 0, 5).