El otro día mi sobrino vino a taladrarme con una batería de problemas de Mates que le habían puesto y que quería estar seguro que resolvía bien. Fuimos haciendo varios y éste me llamó la atención y os lo pongo a ver qué os parece.

Se trata de resolver la integral:

$$\int \sin x \cdot \cos x \cdot dx$$

Lo curioso es que, resolviéndolo de tres maneras distintas, obtenemos tres resultados diferentes…. Empezamos haciendo un cambio de variable sencillito:

$$\sin x = t \qquad \Rightarrow \qquad \cos x \cdot dx = dt$$

Con lo que tenemos que:

$$\int \sin x \cdot \cos x \cdot dx = \int t \cdot dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{sin^2 x}{2} + C$$

Pero… ¿y si en vez de escoger sin x escogemos cos x?, pues tenemos que:

$$\cos x = t \qquad \Rightarrow \qquad -\sin x \cdot dx = dt \qquad \Rightarrow \qquad \sin x \cdot dx = -dt$$

Y tenemos que:

$$\int \sin x \cdot \cos x \cdot dx = \int t \cdot (-dt) = -\int t \cdot dt = -\frac{t^2}{2} + C = -\frac{cos^2 x}{2} + C$$

Pero es que además podemos aplicar la fórmula seno del ángulo doble y tenemos que:

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \qquad \Rightarrow \qquad \sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

Y entonces tenemos que:

$$\int \sin x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \sin 2x \cdot dx$$

Y haciendo el cambio:

$$2x = t \qquad \Rightarrow \qquad 2 \cdot dx = dt \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{dt}{2}$$

Tenemos que:

$$\int \sin x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \sin 2x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \sin t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{4} \cdot (-\cos t) + C = -\frac{\cos 2x}{4} + C$$

Así pues, ¿cuál es la buena?

$$\frac{sin^2 x}{2} + C \qquad \text{ó} \qquad -\frac{cos^2 x}{2} + C \qquad \text{ó} \qquad -\frac{\cos 2x}{4} + C$$