CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA

Vamos a hacer, mediante un ejemplo, los pasos que hay que seguir para calcular la matriz inversa de una dada. Lo haremos por dos métodos diferentes: La fórmula de los adjuntos y el método de Gauss.

El ejemplo que vamos a hacer es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo primero, es saber si esta matriz es invertible, por lo tanto, calcularemos su determinante. En este caso, el cuerpo me pide desarrollar el determinante por la tercera columna…

$$\det A = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 \cdot (1 - 0) = 1$$

Por lo tanto, es invertible. Vamos al turrón.

CASO 1.

El método consiste en calcular la matriz de adjuntos, hacer la transpuesta y luego dividirla por el determinante que acabamos de calcular. Es muy sencillo. Lo único que es un poco más complicado es lo de calcular los adjuntos, pero hay dos trucos que lo simplifican mucho.

Para calcular el adjunto de a_{11}, tachamos la fila y la columna de a_{11} y hacemos el determinante de lo que nos queda, es decir:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 1 & 0 \\ \cancel{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con lo que el determinante (el adjunto) que buscamos es:

$$1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

Ahora hacemos lo mismo con a_{21}:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ \cancel{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El valor del determinante que buscamos es:

$$-1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = -1$$

Pero OJO. Los adjuntos llevan signo. Para recordarlo, podemos empezar por arriba a la izquierda poniendo un + y vamos recorriendo la matriz, moviéndonos en las 4 direcciones básicas (izquierda-derecha-arriba-abajo NUNCA en diagonal) y vamos alternando + y -. El resultado, en este caso es:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el adjunto de a_{21} es 1.

Vamos haciendo lo mismo para el resto y…:

$$Adj\ (A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ya tenemos lo difícil. Ahora hemos de transponer…:

$$Transp\ \left(Adj(A)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sólo nos queda dividir por el determinante, pero en este caso es dividir por 1 por lo que:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

CASO 2.

En este caso, generamos una matriz el doble de ancha que la que tenemos, poniendo en el "tramo añadido" la matriz identidad. En nuestro caso sería:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir de aquí, vamos "generando" ceros (y unos en la diagonal) como si estuviéramos resolviendo un sistema de ecuaciones, es decir, a base de combinaciones lineales de las distintas filas de la matriz. Por ejemplo, ya tenemos un 0 bajo el primer 1, pero necesitamos un 0 donde ahora está el 2. Por lo tanto, hacemos la transformación siguiente:

$$F_3' = F_3 - 2 \cdot F_1$$

Es decir:

$$\begin{array}{c c c c c c c} F_3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 \cdot F_1 & 2 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ F_3' & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}$$

Por lo tanto, la matriz original se me ha transformado en:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora ya tengo un 1 en la segunda posición de la segunda fila. Correcto!!, pero he de "conseguir" un cero justo debajo, por lo que hago:

$$F_3'' = F_3' - 2 \cdot F_2$$

Es decir:

$$\begin{array}{cccccccc} F_3' & & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 \cdot F_2 & & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ F_3'' & & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}$$

Por lo que la matriz se me transforma en:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Este es un caso realmente fácil, ya que casi todo se nos arregla sólo. No hemos de dividir ninguna fila porque los 1 ya nos aparecen de forma natural…. Ahora ya casi estamos, lo único que faltaría sería eliminar el -1 que hay detrás del primer 1, pero eso es muy fácil. Basta con sustituir la primera fila por la suma de primera y segunda, de modo que tenemos:

$$\begin{array}{cccccccc} F_1 & & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ F_2 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ F_1' & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Con lo que la matriz final nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora ya tenemos la matriz identidad a la izquierda y, lo que nos queda a la derecha, es la matriz inversa de A, es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Que, lógicamente, coincide con la que hemos obtenido con el otro método…

De este método, lo que hemos de tener claro es que:

1.- “Metemos ceros” bajo la diagonal principal.

2.- Si algún elemento de la diagonal principal es diferente de 1, dividimos por ese número (en este caso no ha hecho falta)

3.- “Metemos ceros” SOBRE la diagonal principal.

Y con esto acabamos el pdf….