EL CACHONDEO DE TAYLOR. a, c, x… ¿QUIÉN ES QUIÉN?

Al resolver el típico problema sobre el resto de Taylor aparecen una serie de variables y constantes que suelen provocar confusión. Sin embargo, entender qué es qué es muy sencillo y tenerlo claro nos puede ahorrar muchos quebraderos de cabeza.

De entrada, nos encontramos con que, cuando calculamos el polinomio de Taylor, lo hacemos en el entorno de un punto a. Es lo que nos dicen de "calcula el polinomio de Taylor de la función tal **alrededor del punto** x=a".

Esta es la primera constante que nos aparece. Ya sabemos que, para resolverla hay que calcular las derivadas de f(x) en el punto x=a. Por ejemplo, vamos a intentar aproximar la función ln x en el entorno del punto x=1 con un polinomio de grado 2.

Pues hacemos como siempre:

$$\mathrm{f}(1) = \ln 1 = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad f'(1) = 1$$
$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} \qquad \Rightarrow \qquad f''(1) = -1$$

Por lo tanto, nuestro polinomio de Taylor de grado 2 en el entorno de x=1 de la función f(x) es:

$$P_{2,1}(x) = 0 + \frac{1}{1!}\cdot(x-1) + \frac{-1}{2!}\cdot(x-1)^2 = x - 1 - \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}$$

Como podéis comprobar, "lo mejor que nos puede pasar" es que nos pidan el desarrollo alrededor de a=0, ya que entonces, los términos que nos aparecen en el desarrollo del polinomio son x, x^2, x^3, …y no tenemos que hacer desarrollos de (x-1), $(x-1)^2$, $(x-1)^3$….¿Lo veis?

Es precisamente por esto por lo que muchas veces nos encontramos con que, para calcular el ln 1,2 nos piden que desarrollemos el polinomio de Taylor de la función ln (1+x), porque así, al calcular el polinomio lo hacemos "en el entorno de a=0" y la fórmula es más sencilla. Fijaos bien que, para calcular ln 1,2 podemos hacer tres cosas:

1. Calcular el polinomio de Taylor de ln x en el entorno de a=0 y luego sustituir x=1,2.
2. Calcular el polinomio de Taylor de ln x en el entorno de a=1 y luego sustituir x=1,2.
3. Calcular el polinomio de Taylor de ln (1+x) en el entorno de a=0 y luego sustituir x=0,2.

¿Cuál es la mejor? Vamos a verlo.

El caso 1 ya arranca con problemas. Al calcular f(0) tenemos una asíntota vertical y no está definida. Por lo tanto, el caso 1 no sirve….

El caso 2 es el que hemos hecho, y obtenemos:

$$f(x) = \ln x \approx P_{2,1}(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}$$

Si ahora calculamos P(1,2) tenemos:

$$f(1{,}2) = \ln 1{,}2 \ \approx P_{2,1}(1{,}2) = -\frac{(1{,}2)^2}{2} + 2 \cdot 1{,}2 - \frac{3}{2} = 0{,}18$$

Pasemos al caso 3. Hacemos lo de siempre:

$$g(x) = \ln(1+x) \qquad \Rightarrow \qquad g(0) = \ln 1 = 0$$
$$g'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad \Rightarrow \qquad g'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$
$$g''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \qquad \Rightarrow \qquad g''(0) = \frac{-1}{(1+0)^2} = -1$$

Por lo tanto el polinomio nos queda:

$$g(x) = \ln(1+x) \ \approx Q_{2,0}(x) = 0 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{-1}{2!} \cdot x^2 = x - \frac{x^2}{2}$$

Si ahora calculamos Q(0,2) tenemos:

$$g(0{,}2) = \ln(1+x) \ \approx Q_{2,0}(0{,}2) = 0{,}2 - \frac{0{,}2^2}{2} = 0{,}18$$

Vemos que obtenemos el mismo valor, por lo que ambos polinomios aproximan igual este valor (y ninguno da el valor exacto de 0,1823215568), sin embargo, es mucho más sencillo el polinomio del caso 3 que el del caso 2 ¿no?

Y aquí prácticamente termina el papel de a (en este caso a=1 para el caso 2 y a=0 para el caso 3). Una vez ya hemos calculado el polinomio, casi casi que nos olvidamos de a.

Sin embargo, ahora viene cuando la lían, porque generalmente el problema no acaba en el cálculo del polinomio, sino que nos suelen pedir una cota superior del error cometido al hacer la aproximación. La fórmula del error nos dice que en el caso 3, el resto de Taylor es:

$$R_{2,0}(x) = \frac{g'''(c)}{3!} \cdot x^3 \qquad con\ c \in (a, x), es\ decir, c \in (0, x)$$

Y ahora ya sí que nos olvidamos para siempre de a. Por lo tanto, al calcular la fórmula del resto de Taylor para nuestra función, sólo necesitamos calcular g'''(x) y particularizar en c.

$$g'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad \Rightarrow \qquad R_{2,0}(x) = \frac{\frac{2}{(1+c)^3}}{3!} \cdot x^3 = \frac{x^3}{3(1+c)^3} \quad con\ c \in (0, x)$$

Fijaos que en esta expresión aparecen c y x. Son diferentes!!!!!. x lo utilizaremos para “centrarnos” en el punto en el que nos piden que calculemos el error y c es un punto misterioso y tocahuevos que sólo se usa para acotar el valor máximo. Es decir, como que lo que nos pedirán es una cota del error al aproximar ln 1,2 con Q(0,2), lo que hemos de hacer es sustituir x=0,2 y tenemos:

$$R_{2,0}(0{,}2) = \frac{0{,}2^3}{3(1+c)^3} = \frac{0{,}008}{3(1+c)^3} \quad con\ c \in (0, 0{,}2)$$

Y para calcular la cota superior sólo nos queda escoger qué valor de c hace máxima esa expresión, pero es muy sencillo ya que c está sumando en el denominador, por lo tanto, esa expresión será mayor cuanto menor sea c. Como que c debe estar en (0, 0,2), pues la cota superior será cuando c sea 0. Por lo tanto, tenemos que:

$$R_{2,0}(0{,}2) = \frac{0{,}008}{3(1+c)^3} \leq \frac{0{,}008}{3(1+0)^3} = \frac{0{,}008}{3} = 0{,}002666666$$

Si comparamos el valor aproximado obtenido con el valor real tenemos que:

$$\ln 1{,}2 - Q_{2,0}(0{,}2) = 0{,}1823215568 - 0{,}18 = 0{,}0023215568 < 0{,}002666666$$

Vemos que el error cometido es menor que la cota superior del error. Como debe ser!!