EL POLINOMIO DE TAYLOR

El polinomio de Taylor nace del interés que tenían los matemáticos en aproximar una función compleja mediante una función muy simple, en concreto, un polinomio. ¿Por qué un polinomio?, pues porque es fácil de calcular y son funciones muy simples y que "se portan bien" (es decir, son infinitamente derivables, existen para todos los reales, son continuas, etc, etc, etc).

Para hacer la aproximación los listillos pensaron: "Es muy difícil aproximar TODOS los valores de una función, pero…¿y si intento "ajustar" el polinomio sólo en un punto?" y así nació lo de aproximar la función tal "en el entorno de x=a". Es decir, lo que hacen es buscar un polinomio que se parezca mucho a la función original CUANDO ESTAMOS CERCA DE x=a. Cuanto más nos alejemos, peor será la aproximación.

Por último, para hacer la aproximación, dijeron: "Haremos que el valor del polinomio en x=a sea igual al de la función. Además, haremos que su derivada también sea igual y….", así hasta donde quieran. Por eso calculamos el polinomio "de orden n", porque hacemos que las primeras n derivadas del polinomio y de la función (en x=a) coincidan. Con esto, tendremos que en x=a P(a) = f(a), P'(a) = f'(a), …. $P^n(a) = f^n(a)$ y, para valores cercanos a x=a, el polinomio y la función SE PARECERÁN MUCHO, aunque no serán exactamente iguales.

Por ejemplo, para calcular el polinomio de Taylor de grado 2, en el entorno de 0 (es decir, a=0) de la función:

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

lo primero que necesitamos es f(0), f'(0) y f''(0). Así pues:

$$f(0) = \ln(1 + 0) = \ln 1 = 0$$

Y ahora calculamos las dos derivadas:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x} \cdot 1 = \frac{1}{1 + x} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (1 + x) - 1 \cdot 1}{(1 + x)^2} = \frac{-1}{(1 + x)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -1$$

Ahora ya podemos poner la fórmula del polinomio de Taylor:

$$P_{2,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot (x - 0) + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (x - 0)^2$$

Sustituyendo obtenemos:

$$P_{2,0}(x) = 0 + \frac{1}{1} \cdot x + \frac{-1}{2} \cdot x^2 = x - \frac{x^2}{2}$$

Ya tenemos el polinomio. Si calculamos $P_{2,0}(0)$, vemos que obtenemos el valor EXACTO de ln(1+0) = ln 1 = 0; $P_{2,0}(0) = 0$, pero eso no tiene gracia, ya lo sabíamos hemos construido el polinomio para que P(0) = f(0)). Lo que tiene gracia es que con este polinomio podemos aproximar (por ejemplo) ln1,1 ó ln 1,5 ó ln 2 (recordad que cuanto más nos alejemos peor será el resultado). Por ejemplo:

$$\ln(1{,}1) = \ln(1 + 0{,}1) \approx P_{2,0}(0{,}1) = 0{,}1 - \frac{0{,}1^2}{2} = 0{,}1 - 0{,}005 = 0{,}095$$

El valor exacto es ln 1,1 =0,0953101798, por lo que la aproximación es bastante buena (cometemos un error de 0,0003101798).

$$\ln(1{,}5) = \ln(1 + 0{,}5) \approx P_{2,0}(0{,}5) = 0{,}5 - \frac{0{,}5^2}{2} = 0{,}5 - 0{,}125 = 0{,}375$$

El valor exacto es ln 1,5 = 0,4054651081, que ya no es tan buena (cometemos un error de 0,0304651081).

$$\ln(2) = \ln(1 + 1) \approx P_{2,0}(1) = 1 - \frac{1^2}{2} = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

El valor exacto es ln 2 = 0,6931471806, que ya es una aproximación bastante mala (cometemos un error de 0,1931471806).

Bueno, hasta aquí lo del polinomio de Taylor. Lo único que hay que hacer es calcular unas derivadas (que pueden ser más o menos perras) y aplicar una formulita (que hay que saberse, no hay vuelta de hoja. Lo siento). Sencillo ¿no?

Vamos a ver lo del "resto de Taylor" y la cota del error.

Como habéis podido comprobar en el ejemplo, el error depende de x. Cuánto más nos alejemos de a, más error tendremos. Taylor calculó una formulita para "acotar" el error. ¿Qué quiere decir acotar?. Pues encontrar un valor A que nos garantice que el error cometido será más pequeño que A. Como hemos visto que el error depende de x, pues esa cota superior también dependerá de x. Así, cuando nos digan "calcula el error cometido al calcular ln 1,5 = ln(1+0,5) con el $P_{2,0}(x)$, lo que haremos será sustituir 0,5 en la fórmula del error y ya está.

Lo malo, es que la formulita del resto de Taylor no es tan sencilla como la del polinomio. Os explico por qué. De entrada nos pide una derivada más (no se cansaba nunca de derivar el Taylor de los ...) y encima el tío nos dice que hay que evaluarla EN UN PUNTO INTERMEDIO al intervalo (a, x)!!!!!!! Será melón!!! Nosotros no sabemos calcular la "derivada tercera de f(x) en un punto misterioso", pero lo que haremos será..... BUSCAR UNA COTA SUPERIOR. Así, aunque no sepamos exactamente cuánto vale, nos curaremos en salud y pondremos un valor superior y tan anchos.

Por ejemplo, en el caso anterior, lo primero que hay que hacer es calcular la f'''(x), así que....

$$f'''(x) = \frac{0 \cdot (1+x)^2 - (-1) \cdot 2 \cdot (1+x) \cdot 1}{(1+x)^4} = \frac{2 \cdot (1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Y esta no la evaluamos en x=0 porque ha de tomar un valor intermedio en c $\in$(0,x). Así, la fórmula del resto de Taylor para el polinomio $P_{2,0}(x)$ será:

$$R_{2,0}(x) = \frac{f'''(c)}{3!} \cdot (x-0)^3 = \frac{2/(1+c)^3}{6} \cdot x^3 = \frac{x^3}{3 \cdot (1+c)^3}$$

Siempre considerando que $c \in (0,x)$.

ATENCIÓN!!!! Fijaos que en esta última fórmula del resto, nos aparecen tanto x como c. Es MUY importante. El resto tiene una expresión para cada x (ya hemos visto antes que, dependiendo de donde calculamos la aproximación será mejor o peor, por lo que el error crecerá o decrecerá dependiendo de x), y, por desgracia, también nos aparece una c que lo único que hace es liarnos.

Cuando nos piden "la expresión del error", hemos de ponerlo así, con x y c. Cuando nos piden "la expresión del error en el punto tal", hemos de sustituir x por tal y ya lo tendremos. Por último, cuando nos piden la cota del error al calcular el error en el punto tal, pues sustituimos x=tal y buscamos una cota superior para esa "expresión en c".

Así, si nos piden la expresión del error, hemos de responder:

$$R_{2,0}(x) = \frac{x^3}{3 \cdot (1+c)^3}$$

Si nos piden la expresión del error al calcular ln 1,5 mediante el polinomio de Taylor, lo que hacemos es lo que escribí antes, es decir: ln 1,5 = ln (1 + 0,5). Lo calcularemos poniendo x=0,5, por lo que el error cometido será:

$$R_{2,0}(0{,}5) = \frac{0{,}5^3}{3 \cdot (1+c)^3}$$

Con $c \in (0, 0{,}5)$.

Si lo que nos piden es que acotemos el error, lo que hacemos es calcular el valor absoluto de $R_{2,0}(x)$, por lo que si tenemos algún "menos" desaparece y ahora nos queda preguntarnos ¿Cómo acotamos la porquería esa de la c?. Pues es sencillo. De entrada c pertenece a (0, 0,5), y además, la c está sumando en el denominador. Por lo tanto, el error será más grande cuando c sea más pequeña ¿no?. En el intervalo (0, 0,5) el valor más pequeño de c será 0, por lo tanto, acotamos el error como:

$$|R_{2,0}(0{,}5)| \le \frac{0{,}5^3}{3 \cdot (1+0)^3} = 0{,}041666666$$

Si recordáis lo que hemos obtenido antes (un error de 0,0304651081) ya veis que, en efecto, es menor.

Si en el enunciado del problema nos piden directamente que acotemos el error, para hacerlo más sencillo, lo mejor es acotar directamente cuando calculamos la derivada n+1. Es decir, si el enunciado, después de habernos pedido calcular el polinomio de Taylor de grado 2 de ln (1+x) en el entorno del cero, nos pide la cota del error al calcular ln 1,5 con el polinomio, lo que haríamos sería calcular la derivada tercera y hacer:

$$f'''(x) = \frac{0 \cdot (1+x)^2 - (-1) \cdot 2 \cdot (1+x) \cdot 1}{(1+x)^4} = \frac{2 \cdot (1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Como que a esta x la obligaremos a pertenecer a (0, x), vamos a poner una cota:

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} < \frac{2}{(1+0)^3} < 2$$

Y ahora ya podemos ir a la fórmula del resto y poner:

$$R_{2,0}(x) = \frac{f'''(c)}{3!} \cdot (x-0)^3 < \frac{2}{6} \cdot x^3 = \frac{x^3}{3}$$

Y si, tras haber respondido esto, nos pidieran acotar el error en 0,5, sustituyendo x=0,5, acabaríamos llegando a lo mismo que hemos escrito antes:

$$|R_{2,0}(0{,}5)| \leq \frac{0{,}5^3}{3} = 0{,}041666666$$

A los profesores de la UOC les gusta mucho un tipo de ejercicio en el que te piden "¿Hasta qué grado hemos de calcular el polinomio de Taylor para obtener un error menor que.....?". La pregunta es una putadilla, porque has de poner la fórmula genérica del resto de Taylor de orden n, lo que significa que necesitas calcular la derivada n+1 de la función, lo que significa "encontrar un patrón" o una fórmula genérica para las derivadas, y eso no siempre es fácil. Veamos un ejemplo. ¿Hasta qué grado hemos de calcular el polinomio de Taylor para poder aproximar ln 1,5 = ln(1+0,5) con el polinomio de Taylor en el entorno del 0 (es decir, a=0) con un error inferior a 0,01?

La fórmula nos dice que;

$$R_{n,0}(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-0)^{n+1} = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

Para calcular el error al calcular ln 1,5 hemos de sustituir x por 0,5 (que es lo mismo que ½). Por lo tanto, tenemos que:

$$R_{n,0}(0{,}5) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \cdot \left({}^{1}\!/_{2}\right)^{n+1} = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}}$$

Ahora viene cuando la matan. Resulta que hemos de calcular la derivada n+1 de f(x), es decir, hemos de descubrir un patrón en las derivadas de nuestra función. Veamos:

$$f(x) = \ln(1+x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Parece que las derivadas van alternando el signo, hacen que el exponente del numerador vaya creciendo, pero…. ¿y arriba qué ponemos?. Vamos a hacer una derivada más, a ver qué pasa.

$$f^4(x) = \frac{0 \cdot (1+x)^3 - 2 \cdot 3 \cdot (1+x)^2 \cdot 1}{(1+x)^6} = \frac{-6 \cdot (1+x)^2}{(1+x)^6} = \frac{-6}{(1+x)^4}$$

Bueeeeeno, ahora parece que los números que aparecen en el numerador se parecen bastante a los factoriales ¿no?. Así pues, podemos deducir que:

$$f^{n+1}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$$

Por lo tanto, ahora ya podemos sustituir en la fórmula del resto y tenemos que:

$$|R_{n,0}(0{,}5)| = \left|\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}}\right| = \left|\frac{n!/(1+c)^{n+1}}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}}\right| = \left|\frac{1}{(n+1) \cdot (1+c)^{n+1} \cdot 2^{n+1}}\right|$$

Y sabemos que c $\in(0,\ 0{,}5)$. Por lo tanto, como hemos hecho antes, para encontrar una cota superior de esa expresión, hemos de hacer que (1+c) sea lo menor posible, por lo tanto, sabemos que el resto estará acotado por:

$$|R_{n,0}(0{,}5)| \leq \left|\frac{1}{(n+1) \cdot (1+0)^{n+1} \cdot 2^{n+1}}\right| = \left|\frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}\right|$$

Como queremos que el error sea menor que 0,01, tenemos que:

$$\left|\frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}\right| \leq 0{,}01 = \frac{1}{100}$$

Por lo tanto, tenemos que (ojo con el cambio de $\leq$ a $\geq$):

$$(n+1) \cdot 2^{n+1} \geq 100$$

Para resolver esto, lo más cómodo es hacerse una tabla con el Excel (o a mano el día del examen) que verifique cuando triunfamos:

n	n+1	2^{n+1}	$(n+1) \cdot 2^{n+1}$	¿Verifica?
1	2	4	8	No
2	3	8	24	No
3	4	16	64	No
4	5	32	160	Si

Por lo tanto, ya hemos triunfado. Si n= 4 el error será más pequeño que 0,01.