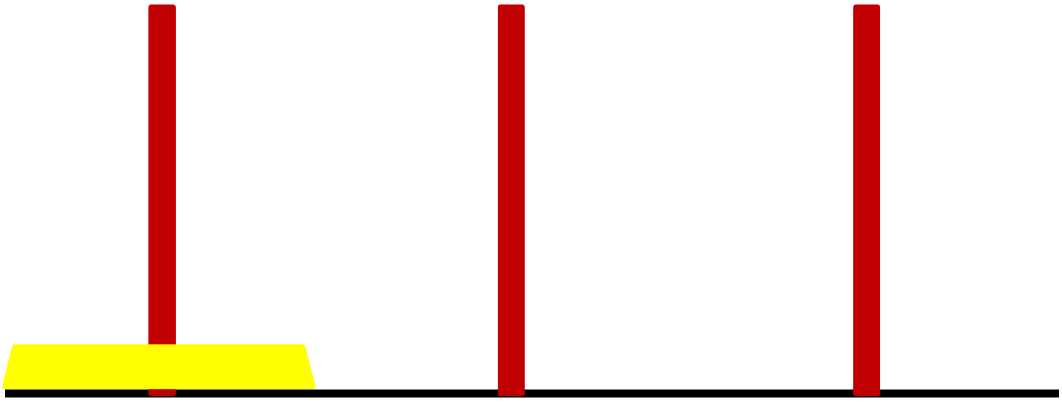
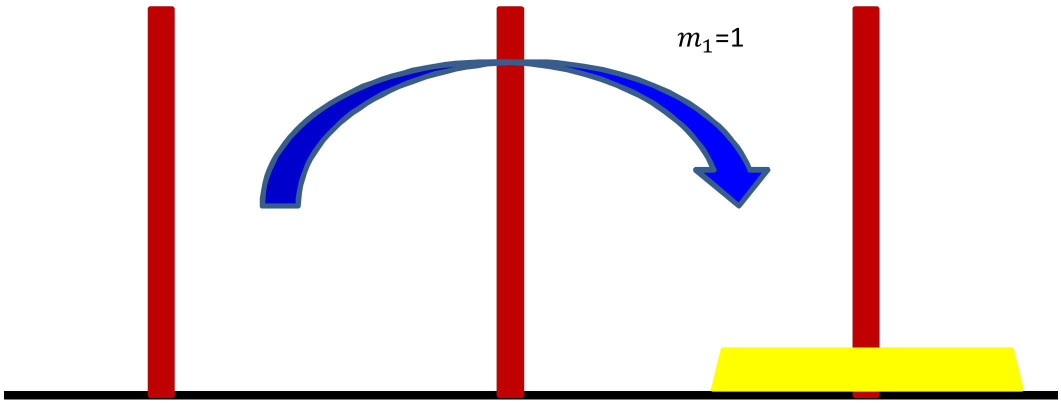
Lo primero que vamos a hacer es aplicar el método de inducción para demostrar que hay solución para cualquier n. Aplicamos los tres pasos del método:

Paso 1. Demostramos que es válido para n=1.

Esto es muy sencillo. Consiste en demostrar que existe solución cuando tenemos un único disco, pero es que eso es una perogrullada.



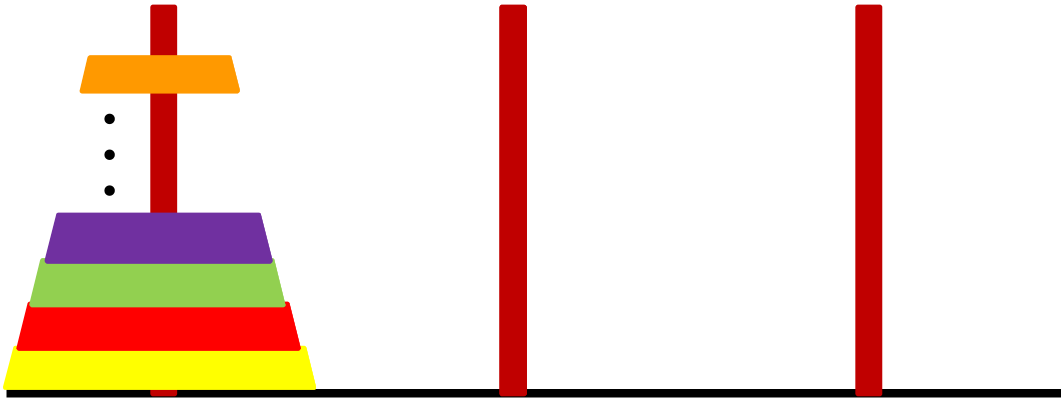
El problema consiste en pasar del soporte de la izquierda al soporte de la derecha nuestro único disco.



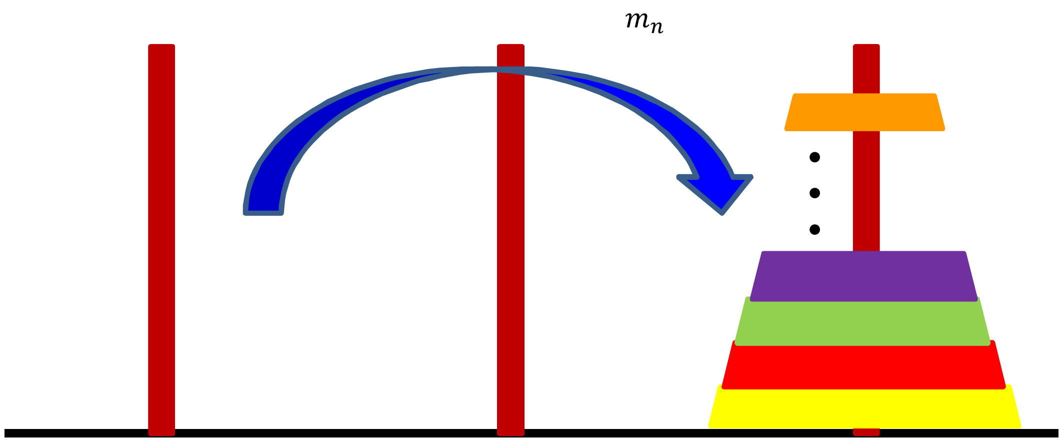
Y además ya vemos que el número mínimo de pasos son 1.

Venga, nos os quejéis que hasta aquí ha sido fácil….

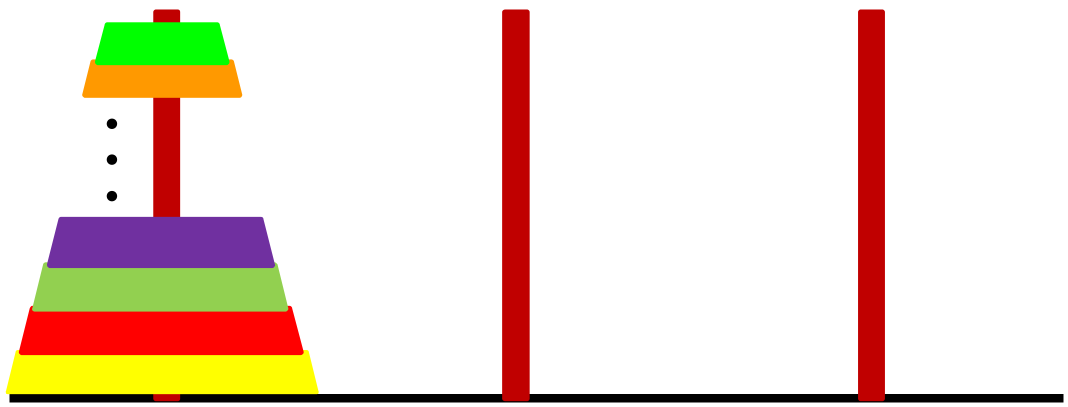
Paso 2. Ahora hemos de establecer la "hipótesis de inducción", es decir, nos creemos, aceptamos que, si tenemos n discos, somos capaces de encontrar la solución. Es decir, si tenemos n discos, somos capaces de pasarlos todos al soporte de la derecha sin contravenir las normas con un número de movimientos que aún está por determinar m_n.



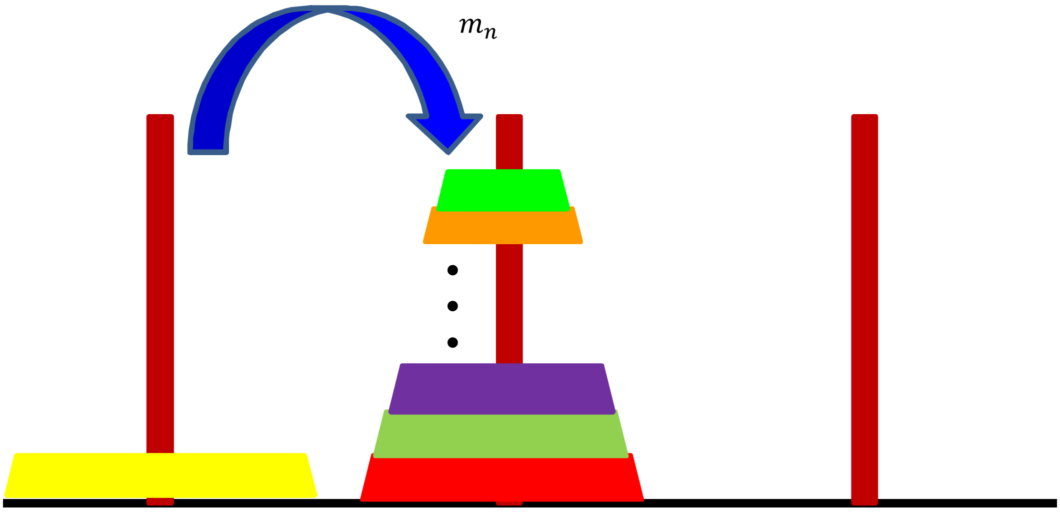
Y no hay que demostrar nada. Simplemente, nos lo creemos!!!!



Paso 3. Aquí ya se complica un poco más. Haciendo uso de lo anterior, hemos de demostrar el caso n+1….

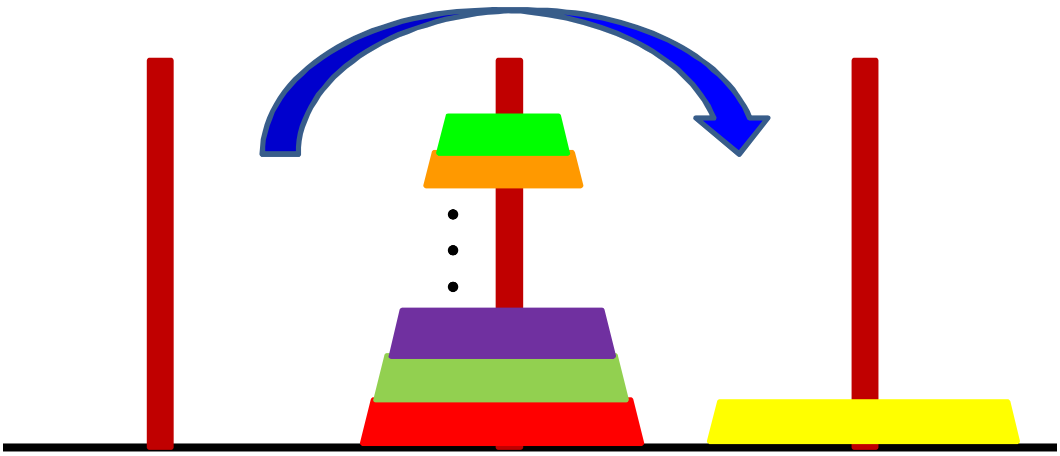


Y aquí hay que ser un poco astuto. Nosotros sabemos (por la hipótesis de inducción) que somos capaces de transportar n discos al soporte de la derecha. Por lo tanto, también seremos capaces de transportar n discos al soporte del centro (simplemente invirtiendo los postes destinatarios de nuestros discos…). Por lo tanto, somos capaces de trasladar todos los discos (a excepción del más grande) al poste central (y eso no lo digo yo, lo dice la “hipótesis de inducción”).

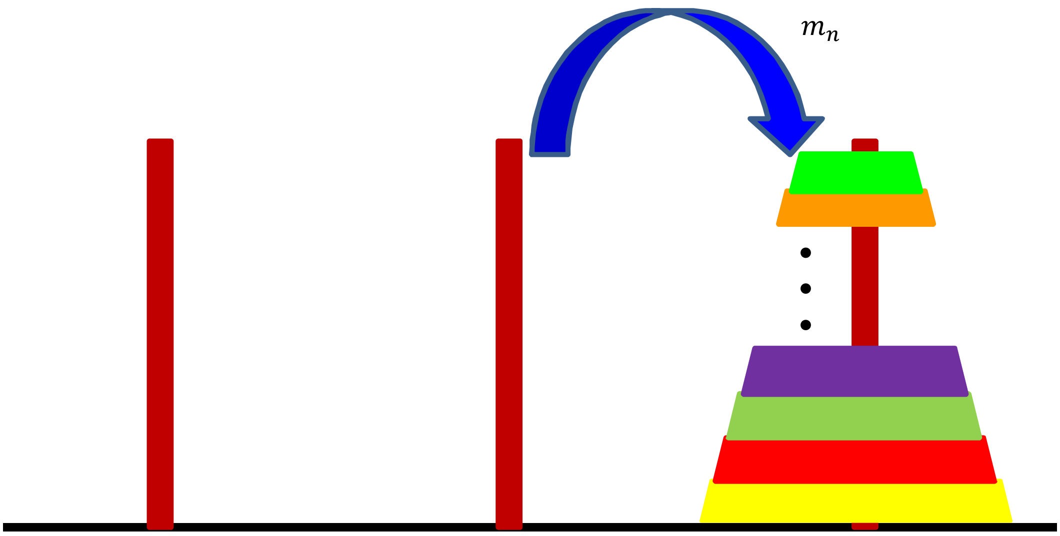


Daos cuenta de que el hecho de tener el disco grande en el primer soporte no es ningún problema, ya que cualquiera de los otros discos se puede poner sobre él y, de hecho es como si estuviera el soporte vacío (que es lo que, de hecho, sucede en el caso n…).

Ahora en un gran ejercicio de habilidad, cambiamos el disco del fondo al tercer soporte.



Y ahora hacemos lo mismo que antes. Si somos capaces de mover n discos del primero al tercero, también seremos capaces de mover n discos del segundo al tercero ¿no? (y al igual que antes, el hecho de tener el disco grande en el tercer soporte no es problema porque todos los demás discos se los podemos poner encima).



Con lo cual, ya hemos demostrado que siempre se puede solucionar (para cualquier valor de n) y, de paso, hemos empezado a resolver la segunda pregunta. El número de pasos para resolver el caso n+1 es:

$$m_{n+1} = m_n + 1 + m_n = 2 \cdot m_n + 1$$

Ahora, utilizando esta propiedad que acabamos de descubrir, vamos a deducir la fórmula del número mínimo de movimientos necesarios para solucionar el problema.

Evidentemente, esa fórmula la podemos "tirar hacia atrás", con lo que tenemos que, el caso general sería:

$$m_n = 2 \cdot m_{n-1} + 1$$

Y, si ahora seguimos "retrocediendo" nos encontramos que:

$$m_n = 2 \cdot m_{n-1} + 1 = 2 \cdot (2 \cdot m_{n-2} + 1) + 1 = (2^2 \cdot m_{n-2} + 2) + 1 = 2^2 \cdot m_{n-2} + 2 + 1$$

Y si seguimos "retrocediendo…:

$$m_n = 2^2 \cdot m_{n-2} + 2 + 1 = 2^2 \cdot (2 \cdot m_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 \cdot m_{n-3} + 2^2 + 2 + 1$$

Y si seguimos y seguimos, hasta que lleguemos al primer caso (el de un solo disco que hemos llamado m_1) nos queda:

$$m_n = 2^{n-1} \cdot m_1 + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1$$

Pero como que el primer término vale 1, lo que obtenemos es:

$$m_n = 2^{n-1} \cdot 1 + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 = m_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1$$

Pero este es un problema que sabemos resolver desde la ESO. Se trata de la suma de los (n-1) primeros términos de una progresión geométrica cuya razón es 2, y eso vale:

$$m_n = S_{n-1} = \frac{a_{m-1} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{2^{n-1} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

Y esos son los movimientos necesarios. Como comprobación, haremos la demostración de esta última fórmula usando el método de inducción.

Paso 1. Para n=1 tenemos que:

$$m_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

Que coincide con lo que habíamos observado.

Paso 2. Establecemos la “hipótesis de inducción”, es decir, nos creemos, aceptamos que:

$$m_n = 2^n - 1$$

Paso 3. Hemos de demostrar el caso n+1 apoyándonos en lo anterior. Nosotros ya hemos visto que, si somos capaces de pasar n discos al soporte derecho, los podremos pasar al soportr central. Luego hemos de cambiar el disco grande, y luego repetir lo anterior y pasar los n discos del soporte central al derecho. Por lo tanto, lo que sabemos es que:

$$m_{n+1} = m_n + 1 + m_n = 2 \cdot m_n + 1$$

Y ahora, podemos utilizar la hipótesis de inducción y obtenemos que:

$$m_{n+1} = 2 \cdot m_n + 1 = 2 \cdot (2^n - 1) + 1 = 2 \cdot 2^n - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$$

Con lo que queda demostrada nuestra proposición.