INTEGRALES IMPROPIAS

Llamamos integral impropia a una integral definida que cumple alguno de estos requisitos:

- Alguno de los límites de integración es infinito.
- La función a integrar se hace infinito (asíntota vertical) dentro de los límites de integración.

Evidentemente, puede darse un tercer caso, como sería la combinación de los dos casos anteriores. Veamos algún ejemplo. La integral

$$\int_0^{\infty} \frac{2x+1}{x^2+3x+2}\,dx$$

Responde claramente al primer tipo. Tenemos un infinito en el límite superior de integración, mientras que la función a integrar se comporta debidamente en el intervalo (0,∞) ya que el denominador se anula en x=-1 y x=-2, que quedan fuera del intervalo. Por otro lado, la integral

$$\int_{-3}^{0} \frac{2x+1}{x^2+3x+2}\,dx$$

Se trata de una integral del segundo tipo. Los límites de integración son finitos, pero en el intervalo de integración (-3, 0) nos encontramos con dos asíntotas verticales que hacen infinito la función a integrar, No hace falta ser un genio para darse cuenta de que la integral

$$\int_{-3}^{\infty} \frac{2x+1}{x^2+3x+2}\,dx$$

Reúne "lo peor de cada caso". Es decir, tiene un límite de intervalo infinito y, además, la función a integrar tiene dos asíntotas verticales en el intervalo de integración.

En resumen, son integrales impropias porque, en algún momento de su resolución, nos topamos con el ∞, y eso, para nosotros (simples estudiantes de AM), nos supone un problema.

¿Cómo se resuelven? Utilizando una técnica llamada "el paso al límite", que es lo que voy a explicar en estas páginas. La verdad es que se podría hacer una explicación genérica, pero haré una para cada caso y, si os encontráis con el caso "mezcla", pues… hacéis una combinación lineal de las soluciones (toma terminología del Álgebra!!!) y se resuelve.

CASO 1. Un límite de integración infinito.

La técnica consiste en aplicar los siguientes pasos:

1. Calculo la primitiva de la función a integrar.
2. Planteo la integral definida (impropia) como un límite cuando el extremo en cuestión tiende a infinito.

Veamos un ejemplo. Supongamos que nos piden calcular la integral impropia

$$\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} \cdot dx$$

Estamos claramente en el primer caso y lo que hay que hacer es aplicar los pasos. Primero calculamos la primitiva (es decir, resolvemos la integral sin límites de integración). Calculamos:

$$F(x) = \int x \cdot e^{-x} \cdot dx$$

La resolvemos por partes haciendo:

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$
$$dv = e^{-x} \cdot dx \quad \Rightarrow \quad v = \int e^{-x} \cdot dx = -e^{-x}$$

Y nos queda:

$$\int x \cdot e^{-x} \cdot dx = x \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} \cdot dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x}$$
$$= -e^{-x} \cdot (x+1)$$

Ahora ya sabemos cuál es F(x) la primitiva de f(x), que nos permitirá plantear el paso al límite.

$$F(x) = -e^{-x} \cdot (x+1)$$

Ahora aplicamos el segundo paso, el "paso al límite".

$$\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} \cdot dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^{a} x \cdot e^{-x} \cdot dx = \lim_{a\to\infty} [F(a) - F(0)]$$
$$= \left[\lim_{a\to\infty} -e^{-x} \cdot (x+1)\right] - \left(-e^{-0} \cdot (0+1)\right) = \lim_{a\to\infty} \frac{-(x+1)}{e^{x}} + 1 = 0 + 1$$
$$= 1$$

Y para resolver este último límite hemos "comparado infinitos" (gana la exponencial) o se resuelve por L'Hopital, como prefiráis.

Por lo tanto, nos encontramos ante una integral impropia que nos da un valor finito, por lo tanto converge y problema solucionado.

CASO 2. La función a integrar se hace infinita n el intervalo.

La técnica es muy parecida.

1. Calculamos la primitiva de la función a integrar.
2. Miramos en qué punto del intervalo se hace infinita la función.
3. Descomponemos la integral usando ese punto como límite.
4. Hacemos el "paso al límite" en las integrales.

Como siempre, lo mejor es usar un ejemplo. Supongamos que nos piden:

$$\int_0^{6} \frac{2x}{(x^2-4)^{2/3}}\, dx$$

Pues, como siempre, lo primero es calcular la primitiva, que nos queda como:

$$F(x) = \int \frac{2x}{(x^2-4)^{2/3}}\,dx$$

Para resolverla hacemos el cambio de variable:

$$x^2 - 4 = t \qquad \Rightarrow \qquad 2 \cdot x \cdot dx = dt$$

Y transforma nuestra integral en:

$$\int \frac{2x}{(x^2-4)^{2/3}}\,dx = \int \frac{dt}{t^{2/3}} = \frac{t^{-2/3+1}}{-2/3+1} = \frac{t^{1/3}}{1/3} = 3 \cdot \sqrt[3]{t} = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2-4}$$

Así que ya tenemos F(x).

$$F(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2-4}$$

Ahora hemos de mirar dónde nos da problemas f(x). Como que se trata de un "cociente de polinomios" (más o menos), lo que hemos de comprobar es cuándo se anula el denominador, por lo tanto hemos de resolver:

$$x^2 - 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Como que x=-2 está fuera de nuestro intervalo de integración, a nosotros sólo nos preocupa el caso x=2. Por lo tanto, ahora planteamos nuestra integral como (paso 3):

$$\int_0^6 \frac{2x}{(x^2-4)^{2/3}}\,dx = \int_0^2 \frac{2x}{(x^2-4)^{2/3}}\,dx + \int_2^6 \frac{2x}{(x^2-4)^{2/3}}\,dx$$

Y las resolvemos aplicando el paso 4, el paso al límite:

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 \frac{2x}{(x^2-4)^{2/3}}\,dx + \int_2^6 \frac{2x}{(x^2-4)^{2/3}}\,dx \\
&\qquad = \lim_{a\to 2^-} \int_0^a \frac{2x}{(x^2-4)^{2/3}}\,dx + \lim_{a\to 2^+} \int_a^6 \frac{2x}{(x^2-4)^{2/3}}\,dx \\
&\qquad = \lim_{a\to 2^-} [F(a) - F(0)] + \lim_{a\to 2^+} [F(6) - F(a)]
\end{aligned}$$

Ahora ya sólo nos queda sustituir F(x) por la función encontrada en el paso 1 y resolver:

$$\begin{aligned}
&\int_0^6 \frac{2x}{(x^2-4)^{2/3}}\,dx \\
&\qquad = \left[\lim_{a\to 2^-} \left(3 \cdot \sqrt[3]{a^2-4}\right) - 3 \cdot \sqrt[3]{0^2-4}\right] \\
&\qquad + \left[3 \cdot \sqrt[3]{6^2-4} - \lim_{a\to 2^+} \left(3 \cdot \sqrt[3]{a^2-4}\right)\right] = \left[0 - 3 \cdot \sqrt[3]{-4}\right] + \left[3 \cdot \sqrt[3]{32} - 0\right] \\
&\qquad = 3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{32} = 3\sqrt[3]{4} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{4} = 9\sqrt[3]{4} \approx 14{,}2866
\end{aligned}$$

Evidentemente, podemos encontrarnos con una versión más sencilla, que sería que la función a integrar se hiciera infinita justo en el extremo, pero eso sólo nos simplifica los cálculos. Imaginad el caso:

$$\int_2^6 \frac{2x}{(x^2-4)^{2/3}}\,dx$$

Pues utilizando todo lo que hemos visto antes, se nos convierte en:

$$\int_2^6 \frac{2x}{(x^2-4)^{2/3}}\,dx = \lim_{a\to 2^+}\int_a^6 \frac{2x}{(x^2-4)^{2/3}}\,dx = \lim_{a\to 2^+}[F(6)-F(a)]$$
$$= \left[3\cdot\sqrt[3]{6^2-4} - \lim_{a\to 2^+}\left(3\cdot\sqrt[3]{a^2-4}\right)\right] = \left[3\cdot\sqrt[3]{32}-0\right] = 6\sqrt[3]{4} \approx 9{,}5244$$

Y por supuesto, se pueden complicar todo lo que se quiera, pero…. ¿para qué quitaros el sueño? Hala, a disfrutarlas!!.