Nos piden una base del núcleo de la aplicación lineal que tiene por matriz asociada:

$$A = \begin{pmatrix} -12 & 12 & 18 \\ -6 & 6 & 9 \\ 8 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

Para solucionar esto, hay que solucionar el sistema homogéneo asociado:

$$\begin{pmatrix} -12 & 12 & 18 \\ -6 & 6 & 9 \\ 8 & -8 & -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si resolvemos mediante Gauss, a la primera de cambio nos "desaparecen" las dos ecuaciones de abajo y nos quedamos con una única ecuación que sería la equivalente a:

$$-12 \cdot x + 12 \cdot y + 18 \cdot z = 0$$

Evidentemente, un sistema de 3 incógnitas con una única ecuación tendrá una solución que dependerá de dos parámetros o "grados de libertad" (como les gusta decir a los matemáticos), ya que 3 – 1 = 2 (incógnitas – ecuaciones = nº parámetros).

En este caso, parece evidente simplificar la ecuación dividiendo por 6 y que nos acabe quedando:

$$-2x + 2y + 3z = 0$$

O lo que es lo mismo:

$$2x = 2y + 3z$$

Que también se puede poner como:

$$x = y + {}^{3}/_{2} \cdot z$$

Como que los parámetros serán "y" y "z", esto es lo mismo que:

$$\begin{cases} x = y + {}^{3}/_{2} \cdot z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

Ahora sólo queda dar valores. Mi recomendación es dar y = 1 y z =0, y luego dar y = 0 y z = 2, con eso obtenemos dos vectores generadores, que son:

$$v1 = (1, 1, 0)$$
$$v2 = (3, 0, 2)$$

Por lo tanto, el núcleo tiene dimensión 2. De las soluciones que te ponen en el enunciado, la única de dimensión 2 es la cuarta opción. Sin embargo, si te miras bien los vectores que te ponen, el primero lo puedes expresar fácilmente como combinación lineal de los v1 y v2 que hemos hallado (coeficientes -3 y -1), pero no hay forma de expresar el segundo como combinación lineal de v1 y v2, por lo que NO pertenece al núcleo y por lo tanto jamás puede formar parte de una base del núcleo. La solución es "ninguna de las otras".