INTEGRACIÓN DE RACIONALES

Nos hallamos ante una racional cuando estamos atacando un problema y nos encontramos con un cociente de polinomios que tenemos que integrar. Hemos de resolver:

$$\int f(x)dx = \int \frac{p(x)}{q(x)}dx$$

Siendo p(x) y q(x) dos polinomios. Nos podemos encontrar dos casos:

- Que grado de p(x) sea ≥ grado de q(x).
- Que grado p(x) < grado de q(x)

1.- CASO GRADO p(x) ≥GRADO q(x).

En este caso, procederemos a realizar la división para acabar reduciendo el problema a uno en el que el grado de p(x) sea menor que el de q(x). Por las propiedades de la división (igual que al dividir 7/3 tenemos de cociente 2 y resto 1 y podemos escribir 7 = 3·2 + 1):

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

Si ahora dividimos ambos lados por q(x) nos queda:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Donde tenemos un polinomio (c(x)) y una racional donde el grado de r(x) < grado q(x). Así acabamos descomponiendo una racional en un polinomio y otra racional, pero ésta ya con el grado del numerador menor que el del denominador. Veamos un ejemplo:

$$\int \frac{2x^2 - x + 8}{2x + 3}dx$$

Lo primero es hacer la división:

$$\begin{array}{ccc|c}
2x^2 & -x & +8 & 2x+3 \\ \cline{4-4}
-2x^2 & -3x & & x-2 \\ \cline{1-2}
 & -4x & +8 & \\
 & 4x & +6 & \\ \cline{2-3}
 & & 14 &
\end{array}$$

Por lo que podemos escribir:

$$\frac{2x^2 - x + 8}{2x + 3} = (x - 2) + \frac{14}{2x + 3}$$

Y así nuestra integral se transforma en:

$$\int \frac{2x^2 - x + 8}{2x + 3}dx = \int (x - 2) \cdot dx + \int \frac{14}{2x + 3}dx$$

Y estas integrales las sabemos hacer. La primera es la de un polinomio que es inmediata, y la segunda es quasi-inmediata si utilizamos el truco de la derivada logarítmica, y para eso hemos de descomponer el 14 en 2·7.

$$\int (x-2)\cdot dx + \int \frac{14}{2x+3}dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 7\cdot\int \frac{2}{2x+3}dx$$

Ahora, en esta última integral sólo hay que ver que “lo de arriba” es la derivada de “lo de abajo” y, aplicando la derivada logarítmica, es inmediato.

$$\int \frac{2x^2 - x + 8}{2x+3}dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 7\cdot \ln|2x+3| + Cte.$$

2.- CASO GRADO p(x) <GRADO q(x).

Aquí nos encontraremos con 4 casos genéricos, aunque el último viene a ser una mezcla de los anteriores.

a) q(x) sólo tiene raíces reales simples.
b) q(x) sólo tiene raíces reales (alguna múltiple).
c) q(x) sólo tiene raíces complejas simples.
d) Mezcla de todo.

Faltaría el caso de raíces complejas múltiples, pero este no lo explicaré por no hacer el pdf demasiado largo….

2.a) Raíces reales simples.

Supongamos que tenemos:

$$\int \frac{\frac{1}{2}x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}dx$$

Lo primero es buscar las raíces de q(x) que, dado que su término independiente es -2, sólo podrán ser los divisores de -2, es decir, probaremos 1, -1, 2 y -2. Lo hacemos por Ruffini.

	1	2	-1	-2
1		1	3	2
	1	3	2	0

Por lo tanto 1 es raíz y ya sabemos que q(x) se podrá descomponer en:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)\cdot(x^2 + 3x + 2)$$

Y para encontrar el resto de raíces utilizamos la fórmula de Cardano:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{-2}{2} = -1 \\ \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Por lo tanto, ya tenemos todas las raíces de q(x) y lo podemos descomponer como:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$$

Ahora pasamos a descomponer nuestra racional en fracciones simples, es decir, utilizamos la descomposición de q(x) en sus raíces para descomponer la racional en fracciones mucho más simples de integrar.

$$\frac{\frac{1}{2}x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Lo siguiente es reducir a común denominador, e igualar los numeradores, así nos queda:

$$\frac{1}{2}x^2 + 1 = A \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) + B \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) + C \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$$

Aquí tenemos una igualdad entre polinomios. La forma "ortodoxa" de resolverlo sería desarrollar todo el polinomio de la derecha e igualar los coeficientes de los términos del mismo grado. Así, igualaríamos ½ al coeficiente del término de segundo grado, igualaríamos 0 al coeficiente del término de primer grado e igualaríamos 1 al término independiente.

Pero hay un truco que simplifica mucho los cálculos. Como se trata de dos polinomios (es decir, son dos funciones que dependen de x), la igualdad debe mantenerse PARA TODOS los valores de x. En concreto, vamos a fijarnos en los tres valores que son raíces de q(x) y dando valores tenemos:

$$Para\,x = 1\,tenemos: \quad \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 = A \cdot 2 \cdot 3 + B \cdot 0 + C \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4}$$
$$Para\,x = -1\,tenemos: \quad \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 1 = A \cdot 0 + B \cdot (-2) \cdot 1 + C \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{-3}{4}$$
$$Para\,x = -2\,tenemos \quad \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 1 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot (-3) \cdot (-1) \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

Por lo tanto, nuestra integral queda como:

$$\int \frac{\frac{1}{2}x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx = \int \frac{1/4}{x - 1} dx + \int \frac{-3/4}{x + 1} dx + \int \frac{dx}{x + 2}$$

Y las tres integrales que nos quedan, sacando fuera los coeficientes, son inmediatas, por lo que:

$$\int \frac{\frac{1}{2}x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx = \frac{1}{4} \cdot \ln|x - 1| - \frac{3}{4} \cdot \ln|x + 1| + \ln|x + 2| + Cte.$$

2.b) Raíces reales múltiples.

Supongamos que tenemos:

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^3}dx$$

Aquí ya tenemos las raíces. Tenemos una raíz triple en x=1. La descomposición en fracciones simples que hay que hacer ahora es la siguiente:

$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}$$

Ahora hacemos lo mismo que en el caso anterior, reducimos a común denominador e igualamos los numeradores, y nos queda:

$$x^2 = A + B \cdot (x-1) + C \cdot (x-1)^2$$

Lo que pasa es que ahora sólo puedo dar un "valor maravilloso que me anula muchos términos". Si doy el valor x=1 me queda:

$$1 = A$$

Por lo que tengo que desarrollar lo que queda, es decir:

$$x^2 = A + Bx - B + Cx^2 - 2Cx + C$$

Y como que A = 1 me queda:

$$x^2 = 1 + Bx - B + Cx^2 - 2Cx + C$$

Y que se me "despliega" en tres ecuaciones (una por cada término de los polinomios) aunque en el fondo sólo necesito 2 (porque ya he calculado A).

$$\begin{gathered} Término\ de\ x^2 x^2 = C \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad C = 1 \\ Término\ de\ x \quad 0 \cdot x = B \cdot x - 2 \cdot C \cdot x \quad \Rightarrow \quad B = 2 \\ Término\ independiente \quad 0 = A - B + C \quad 0 = 1 - 2 + 1 \end{gathered}$$

Realmente, la última no aporta nada, pero sirve para comprobar. Si nos llega a salir 0 = 2…. Houston, tenemos un problema!!!. Ahora ya podemos descomponer nuestra integral en:

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^3}dx = \int \frac{1}{(x-1)^3}dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}dx + \int \frac{1}{x-1}dx$$

La primera y la segunda integral se resuelven haciendo el cambio de variable t = x-1, mientras que la tercera es inmediata (aunque también se puede hacer el mismo cambio de variable. Yo siempre lo hago porque es más seguro…pero para gustos…)

Si hacemos:

$$x - 1 = t \quad entonces \quad dx = dt$$

Por lo que nos quedan:

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^3}dx = \int t^{-3}dt + 2 \cdot \int t^{-2}dt + \int \frac{dt}{t} = \frac{t^{-2}}{-2} + 2 \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + \ln t + Cte.$$

Ahora sólo queda deshacer el cambio y poner los exponentes negativos como 1/…. Y nos queda:

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^3}dx = \frac{-1}{2\cdot(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \ln|x-1| + Cte.$$

Evidentemente, nos podemos encontrar con casos en los que se encuentran mezcladas raíces simples y dobles. Pues bien, trataremos a cada cual según se merece. Por ejemplo, si tenemos:

$$\int \frac{x^3 + x - 2}{x^4 - x^3 - 2x^2}dx$$

Ya vemos que en q(x) podemos sacar factor común x^2, lo que quiere decir que tiene una raíz doble en x=0. El polinomio que queda, lo descomponemos con la fórmula de Cardano y, al final resulta que nuestro q(x) es:

$$x^4 - x^3 - 2x^2 = (x-0)^2\cdot(x-2)\cdot(x+1)$$

Por lo que nuestra fracción la vamos a descomponer como:

$$\frac{x^3 + x - 2}{x^4 - x^3 - 2x^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+1}$$

Y ahora hacemos lo de siempre: Reducimos a común denominador e igualamos los numeradores y tenemos:

$$x^3 + x - 2 = A\cdot(x-2)(x+1) + B\cdot x(x-2)(x+1) + C\cdot x^2(x+1) + D\cdot x^2(x-2)$$

Y ahora vamos dando "valores maravillosos que me anulan muchos términos".

$$\begin{array}{lccc} Para\, x = 0 & -2 = -2\cdot A & \Rightarrow & A = 1 \\ Para\, x = 2 & 8 = 12\cdot C & \Rightarrow & C = \frac{2}{3} \\ Para\, x = -1 & -4 = -3\cdot D & \Rightarrow & D = \frac{4}{3} \end{array}$$

Me falta encontrar B ya que x=0 es una raíz doble y no tengo más "valores maravillosos" que dar. Ahora puedo hacer dos cosas: O doy un valor arbitrario a x y ya tendré la ecuación que me falta (aunque los números que me salgan pueden ser complicados) o me fijo un poco en la igualdad de polinomios. Si te fijas bien, ves que B seguro que aparece en el término de x3 (ya que B multiplica a x ·(x-2)·(x+1), y además llevará coeficiente 1. Pues hacemos la igualdad de los términos de x3, y no hace falta que desarrollemos todo el polinomio.

$$Término\ de\ x^3 \quad 1 = B + C + D \qquad 1 = B + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \qquad \Rightarrow \quad B = -1$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{x^3 + x - 2}{x^4 - x^3 - 2x^2}dx = \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{2/3}{x-2}dx + \int \frac{4/3}{x+1}dx$$

Y la resolución de todas estas integrales es inmediata una vez sacamos los coeficientes fuera de la integral, y nos queda:

$$\int \frac{x^3 + x - 2}{x^4 - x^3 - 2x^2} dx = \frac{-1}{x} - \ln|x| + \frac{2}{3} \cdot \ln|x - 2| + \frac{4}{3} \cdot \ln|x + 1| + Cte.$$

2.c) Raíces complejas simples.

Iremos avanzando poco a poco, pasando del caso más sencillo de raíz imaginaria y lo iremos complicando a medida que avancemos.

2.c.1.- Raíz compleja asimilable a la arcotangente.

El primer caso es el del primer número complejo que nos encontramos, es decir, el polinomio $x^2 + 1$.

$$\int \frac{1}{x^2 + 1}\, dx$$

Esta es una integral inmediata (de esas que hemos de memorizar, no hay más remedio) y el resultado es:

$$\int \frac{1}{x^2 + 1}\, dx = arc \tan x + Cte.$$

Ahora bien, ¿qué pasa si el polinomio sólo se "parece" a éste?, por ejemplo:

$$\int \frac{dx}{3 + 2x^2}$$

Lo primero es poner un 1 en el término que no lleva x, lo conseguimos dividiendo "arriba y abajo" por 3:

$$\int \frac{dx}{3 + 2x^2} = \int \frac{\frac{dx}{3}}{\frac{3+2x^2}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1 + \frac{2x^2}{3}}$$

Ahora viene el segundo paso, que es dejar la x^2 sola, es decir, el 2 que está multiplicando a x^2 lo "paso abajo" dividiendo.

$$\frac{1}{3}\int \frac{dx}{1 + \frac{2x^2}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x^2}{3/2}\right)}$$

Ahora lo que hay que hacer es "meter" el coeficiente 3/2 "dentro del cuadrado", que se hace "metiéndolo" dentro de una raíz.

$$\frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x^2}{3/2}\right)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3/2}}\right)^2}$$

Y ahora sólo nos queda aplicar el cambio de variable siguiente:

$$t = \frac{x}{\sqrt{3/2}} \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{3/2}\,t \qquad \Rightarrow \qquad dx = \sqrt{3/2}\,dt$$

Y sustituyendo tenemos:

$$\frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3/2}}\right)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{3/2}\,dt}{1+t^2} = \frac{\sqrt{3/2}}{3}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot acr\tan t + Cte.$$

Ahora ya sólo nos queda "deshacer el cambio" y tenemos que nuestra integral original vale:

$$\int \frac{dx}{3+2x^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot arc\tan \frac{x}{\sqrt{3/2}} + Cte.$$

Es un poco largo, pero muy mecánico... Vamos a complicarlo un poquito más.

2.c.2.- Raíz compleja con término en x.

Ahora en el denominador nos encontraremos con un polinomio de orden 2 pero que SÍ QUE TIENE término en x. Por ejemplo:

$$\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$$

Si intentamos encontrar las raíces del polinomio del denominador, obtenemos valores complejos, por lo que hay que aplicar lo siguiente. Lo primero es dejar un 1 como coeficiente de x^2. Eso ya lo sabemos hacer por lo que voy un poco más rápido...:

$$\int \frac{dx}{2x^2-5x+7} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{7}{2}}$$

Ahora lo que hay que hacer es escribir el polinomio x^2-ax+b que nos queda abajo de la manera más parecida posible al desarrollo de un "producto notable", en este caso concreto, como el término en x resta, en el desarrollo del producto notable $(x-c)^2$. Lo que hacemos es la siguiente igualdad:

$$x^2-\frac{5}{2}x+\frac{7}{2} = (x-c)^2+k = x^2-2\cdot x\cdot c+c^2+k$$

Lo primero que vemos es que las x^2 las tenemos bien . De coña!!!!. Lo segundo que vemos es que nuestros términos en x nos llevan a la conclusión de que:

$$\frac{-5}{2} = -2 \cdot c \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{5}{4}$$

Ahora ya sólo nos queda igualar los términos independientes para conseguir encontrar k, de manera que:

$$\frac{7}{2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 + k \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{7}{2} - \frac{25}{16} = \frac{31}{16}$$

Por lo tanto, podemos poner que:

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 5x + 7} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}}$$

Ahora, con hacer el siguiente cambio de variable:

$$x - \frac{5}{4} = t \qquad \Rightarrow \qquad dx = dt$$

Podemos decir eso que les gusta tanto a los matemáticos de "...lo reducimos al caso anterior":

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 5x + 7} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{31}{16}}$$

Como hemos visto antes, ahora buscamos el 1 en el término independiente....

$$\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{31}{16}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{31/16} \int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{31/16}}\right)^2 + 1}$$

Hacemos un nuevo cambio de variable y...

$$\frac{t}{\sqrt{31/16}} = u \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{31}{16}} \cdot u \qquad \Rightarrow \qquad dt = \frac{\sqrt{31}}{4} \cdot du$$

Y nos queda:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{31/16} \int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{31/16}}\right)^2 + 1} = \frac{8}{31} \cdot \frac{\sqrt{31}}{4} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{2\sqrt{31}}{31}\ 3\, arc \tan u + Cte.$$

Ahora sólo nos queda deshacer los cambios y...

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 5x + 7} = \frac{2\sqrt{31}}{31}\ 3\, arc\tan\frac{t}{\sqrt{31}/_4} + Cte. = \frac{2\sqrt{31}}{31}\ 3\, arc\tan\frac{x - \frac{5}{4}}{\sqrt{31}/_4} + Cte.$$

Que también es muy largo, pero muy mecánico. Os recuerdo que el "truco" consiste en igualar:

$$x^2 - ax + b = (x - c)^2 + k$$

Que en nuestro caso era:

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{7}{2} = (x - c)^2 + k$$

Y que nos daba:

$$\begin{cases} c = \dfrac{5}{4} \\ k = \dfrac{31}{16} \end{cases}$$

2.c.3.- Raíz compleja con término en x y polinomio de grado 1 en el numerador.

Vamos a ver ahora el último caso de raíces complejas, que es cuando en el numerador no tenemos 1, sino un polinomio de grado 1, es decir, el caso genérico:

$$\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c}\, dx$$

Veamos un ejemplo:

$$\int \frac{x - 2}{x^2 - 2x + 3}\, dx$$

En este caso, lo que buscaremos será pode aplicar el truco de la "derivada logarítmica" por lo que intentaremos descomponer nuestra fracción en dos fracciones, una de las cuales tenga "arriba" la "derivada de lo de abajo". En este caso vamos a descomponer como sigue:

$$\frac{x - 2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{a \cdot (2x - 2)}{x^2 - 2x + 3} + \frac{k}{x^2 - 2x + 3}$$

Fijaos que la primera fracción tiene en el numerador a·(derivada de lo de abajo). ¿Lo veis?

Resolvemos esa igualdad igualando los numeradores e igualando término a término y tenemos:

$$a \cdot (2x - 2) + k = x - 2$$

$$2ax + (k - 2a) = x - 2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 2a = 1 \\ k - 2a = -2 \end{cases}$$

De donde sacamos a=1/2 y k=-1. Por lo tanto tenemos que:

$$\int \frac{x-2}{x^2-2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+3} - \int \frac{dx}{x^2-2x+3}$$

La primera es inmediata por el truco de la "derivada logarítmica" (si no lo veis claro haced el cambio x^2-2x+3 = t y os saldrá directa) y con la segunda.... Volvemos a estar en el caso anterior!!!!! Empezamos a parecer matemáticos de verdad ¿eh?

$$\int \frac{x-2}{x^2-2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\cdot \ln|x^2-2x+3| - \int \frac{dx}{x^2-2x+3}$$

Ahora sólo nos queda hacer la integral (que ya sabemos hacer)

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+3}$$

Lo primero, como el término cuadrático ya tiene coeficiente 1, es aplicar el "truco" que aprendimos en el apartado anterior.

$$x^2-2x+3 = (x-c)^2+d = x^2-2cx+(c^2+d) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c = 1 \\ d = 2 \end{cases}$$

Sustituimos y...

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+3} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+2}$$

Hacemos el primer cambio de variable...

$$x-1 = t \qquad \Rightarrow \qquad dx = dt$$

Con lo que tenemos:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2+2} = \int \frac{dt}{t^2+2}$$

Dividimos "arriba y abajo" por 2...

$$\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\frac{t^2}{2}+1}$$

"Metemos" el 2 en el cuadrado...

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\frac{t^2}{2}+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

Y hacemos el segundo cambio de variable...

$$\frac{t}{\sqrt{2}} = u \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{2}\,u \qquad \Rightarrow \qquad dt = \sqrt{2}\,du$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot arc\tan u + Cte.$$

Y ahora, sólo nos queda deshacer los cambios y tenemos que:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot acr\tan\frac{x-1}{\sqrt{2}} + Cte.$$

Y entonces nuestra integral primera, suma de las dos que hemos resuelto nos queda como:

$$\int \frac{x-2}{x^2 - 2x + 3}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \ln|x^2 - 2x + 3| - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot acr\tan\frac{x-1}{\sqrt{2}} + Cte.$$

Tachaaaaannn.

2.d) Mezcla de todo.

Bueno, sé que estáis cansados, pero… queda ya tan poquito para acabar!!! ¿Cómo? ¿Qué no habíamos acabado ya? Bueno, de hecho hemos terminado pero…. ¿Qué ocurre si nos encontramos con mezcla de casos? Pues que resolvemos cada caso como hemos aprendido. Por ejemplo (y es el último, lo prometo).

$$\int \frac{dx}{x^4 - 6x^3 + 13x^2}$$

Es inmediato ver que tenemos una raíz doble en x=0. Vamos a ver qué pasa con el “otro” polinomio que nos queda al sacar factor común x^2.

$$x^2 - 6x + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Que, efectivamente, tiene raíces complejas. Ahora lo que hay que hacer es descomponer nuestra fracción original en fracciones simples…

$$\frac{1}{x^4 - 6x^3 + 13x^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 - 6x + 13}$$

Hacemos lo de siempre, reducimos a común denominador e igualamos los numeradores:

$$1 = A \cdot (x^2 - 6x + 13) + B \cdot x \cdot (x^2 - 6x + 13) + (Mx + N) \cdot x^2$$

Ahora sólo puedo dar un “valor maravilloso que me anula términos”, el x=0. Si doy ese valor…

$$1 = A \cdot 13 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{13}$$

Ahora ya no puedo dar más valores “perfectos”, pero si me fijo bien, veo que el coeficiente de x sólo llevará A y B, por lo tanto puedo igualar:

$$0 = -6 \cdot A + 13 \cdot B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{6}{169}$$

Y si ahora me fijo en el coeficiente de x^2, vemos que sólo llevará A, B y N, por lo tanto:

$$0 = A - 6 \cdot B + N \qquad \Rightarrow \qquad N = \frac{23}{169}$$

Y por último, el coeficiente de x^3 me proporciona la ecuación:

$$0 = B + M \qquad \Rightarrow \qquad M = \frac{-6}{169}$$

Por lo tanto, la descomposición de la fracción es:

$$\frac{1}{x^4 - 6x^3 + 13x^2} = \frac{{}^1\!/_{13}}{x^2} + \frac{{}^6\!/_{169}}{x} + \frac{{}^{-6x}\!/_{169} + {}^{23}\!/_{169}}{x^2 - 6x + 13}$$

Y nuestra integral se descompone en:

$$\int \frac{dx}{x^4 - 6x^3 + 13x^2} = \frac{1}{13}\int \frac{dx}{x^2} + \frac{6}{169}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{169}\int \frac{-6x + 23}{x^2 - 6x + 13}dx$$

Y ahora estas tres integrales las sabemos resolver. La primera es inmediata, al igual que la segunda y la tercera forma parte del último caso que hemos visto de raíces complejas.

$$\int \frac{dx}{x^4 - 6x^3 + 13x^2} = \frac{-1}{13\,x} + \frac{6}{169}\ln|x| + \frac{1}{169}\int \frac{-6x + 23}{x^2 - 6x + 13}\,dx$$

Ahora sólo nos queda resolver esta última integral con el procedimiento que ya hemos visto...

$$\frac{-6x + 23}{x^2 - 6x + 13} = \frac{a \cdot (2x - 6)}{x^2 - 6x + 13} + \frac{k}{x^2 - 6x + 13}$$

Al igualar los numeradores tenemos:

$$a \cdot (2x - 6) + k = -6x + 23 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a = -3 \\ k = 5 \end{cases}$$

Por lo que:

$$\int \frac{-6x + 23}{x^2 - 6x + 13}\,dx = -3 \cdot \int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 13}dx + 5 \cdot \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$$

Donde la primera es inmediata y la segunda es del segundo tipo de complejas...

$$\int \frac{-6x + 23}{x^2 - 6x + 13}\,dx = -3 \cdot \ln|x^2 - 6x + 13| + 5 \cdot \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$$

Y para hacer esta última integral, como que el término cuadrático ya lleva un 1, pasamos directamente a buscar qué desarrollo de producto notable es, es decir:

$$x^2 - 6x + 13 = (x - c)^2 + d \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} c = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

Por lo tanto...

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 4} = \int \frac{dt}{t^2 + 4} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\frac{t^2}{4} + 1} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 1}$$

Hemos hecho un primer cambio de variable por el camino, y ahora nos queda hacer el segundo, que sería:

$$\frac{t}{2} = u \qquad \Rightarrow \qquad t = 2u \qquad \Rightarrow \qquad dt = 2 \cdot du$$

Y que nos lleva a:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13} = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{2}\, arc \tan u = \frac{1}{2}\, arc \tan \frac{t}{2} = \frac{1}{2}\, arc \tan \frac{x-3}{2}$$

Y así, nuestra súper integral, nos queda como:

$$\int \frac{dx}{x^4 - 6x^3 + 13x^2} = \frac{-1}{13\,x} + \frac{6}{169} \ln|x| - \frac{3}{169} \ln|x^2 - 6x + 13| + \frac{5}{169} arc \tan \frac{x-3}{2} + Cte$$

Y ahora sí, ya hemos acabado.