APLICACIONES LINEALES 3. CAMBIO DE BASE

Creo que todos tenemos clara la teoría de los cambios de base. Si tenemos una aplicación lineal y tenemos su matriz en una determinada base (por ejemplo la canónica) y queremos encontrar su expresión en otra base cualquiera, todos sabemos que hemos de multiplicar (por delante y por detrás) por la matriz identidad de cambio de base, lo que nos genera una igualdad semejante a:

$$M_{B|B} = Id_{C\to B} \cdot M_{C|C} \cdot Id_{B\to C}$$

3.- Deshacemos el cambio de base para expresar el resultado en la base B

2.- Ejecutamos la aplicación lineal en coordenadas canónicas

1.- Cambiamos de la base B a nuestra base canónica

Parece un galimatías, pero es bastante sencillo si tienes ese esquema en mente. Vamos a poner un ejemplo donde realizaremos todo el proceso (formación de la matriz de la aplicación en la base canónica, polinomio característico, cálculo de los VAP y los VEP, cambio de base y diagonalización) y así cerramos el tema de aplicaciones lineales.

Supongamos que tenemos una aplicación lineal g: $R^3 \to R^3$ definida por:

$$g(x,y,z) = (3x - 2y + z, 4x - 3y + 2z, 5x - 4y + 3z)$$

Lo primero es hallar la matriz en la base canónica, para eso necesitamos calcular las imágenes de los 3 vectores de la canónica, es decir:

$$g(1,0,0) = (3 - 0 + 0, 4 - 0 + 0, 5 - 0 + 0) = (3,4,5)$$
$$g(0,1,0) = (0 - 2 + 0, 0 - 3 + 0, 0 - 4 + 0) = (-2,-3,-4)$$
$$g(0,0,1) = (0 - 0 + 1, 0 - 0 + 2, 0 - 0 + 3) = (1,2,3)$$

Por lo tanto, la matriz de g en la base canónica es:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora vamos a calcular su polinomio característico:

$$P(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 1 \\ 4 & -3-\lambda & 2 \\ 5 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (3-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3-\lambda & 2 \end{vmatrix}$$
$$= (3-\lambda)\cdot[(-3-\lambda)(3-\lambda)+8] - 4\cdot[(-6+2\lambda)+4] + 5$$
$$\cdot[-4-(-3-\lambda)] = (3-\lambda)(\lambda^2-1) - 4(2\lambda-2) + 5(\lambda-1)$$
$$= 3\lambda^2 - 3 - \lambda^3 + \lambda - 8\lambda + 8 + 5\lambda - 5 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$$
$$= -\lambda\cdot(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

Por lo tanto, ya vemos que una de las raíces es cero, y las otras dos las encontramos mediante la fórmula de Cardano-Vieta:

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-4\cdot 1\cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ \dfrac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto los valores propios son {0, 1, 2}. Al ser tres valores propios distintos ya podemos decir que la matriz diagonaliza. Vamos a calcular sus vectores propios:

Para λ=0

El sistema homogéneo asociado es:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al resolverlo por Gauss, como tengo un 1 en el coeficiente de la z de la primera ecuación, en vez de meter ceros bajo la “diagonal principal”, los meteré bajo su simétrica, de manera que el proceso es:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, de la segunda ecuación tengo:

$$-2x + y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = 2x$$

Al sustituir en la primera nos queda:

$$3x - 2\cdot(2x) + z = 0 \qquad \Rightarrow \quad 3x - 4x + z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -x + z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = z$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ x \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si a x le damos el valor 1, el vector propio asociado es (1, 2, 1).

Para λ=1

El sistema homogéneo asociado es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y el proceso de resolución (aplicando el mismo “truco” que antes) es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la tercera ecuación obtenemos que:

$$x = 0$$

Al sustituir en la primera tenemos que:

$$2 \cdot 0 - 2y + z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -2y + z = 0 \qquad \Rightarrow z = 2y$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 2y \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si a y le damos el valor 1, el vector propio es (0,1,2).

Para λ=2

El sistema homogéneo asociado es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este ya lo podemos resolver de manera “normal” ya que también tenemos un 1 en el primer elemento, por lo que:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la segunda obtenemos que:

$$3y - 2z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{2z}{3}$$

Al sustituir en la primera tenemos que:

$$x - 2 \cdot \left(\frac{2z}{3}\right) + z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{z}{3}$$

Por lo tanto la solución es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z/3 \\ 2z/3 \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si a z le damos el valor 3 (para que nos desaparezcan los quebrados), el vector propio es (1,2,3).

Ahora ya sólo nos queda expresar g en la base formada por los vectores propios, pero esto es relativamente sencillo. Sólo necesitamos las matrices de cambio de base. Yo sé que esto puede resultar lioso (¿cuál va dónde?, ¿ha calculado la de C a B o la de B a C?, etc), pero os explico cómo le resuelvo yo, a ver si os sirve.

Tenemos la base B que, expresada en la canónica es {(1,2,1), (0,1,2), (1,2,3)}. Si los vectores de esta base los expresamos en la base B, es decir, como combinación lineal de ellos mismos, resulta que nos quedarían como {(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)} (Lógico ¿no?).

Creo que esto último es lo más difícil de ver, pero, os lo demuestro para el primero y listo ¿ok?. Para encontrar las coordenadas de un vector en una determinada base, lo que hacemos es expresar ese vector como combinación lineal de la base y los coeficientes de la combinación lineal serán las coordenadas. En este caso:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, de la tercera tenemos:

$$2\lambda_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_3 = 0$$

De la segunda tenemos:

$$\lambda_2 = 0$$

Y al sustituir en la primera tenemos:

$$\lambda_1 + 0 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 1$$

Ya sé que es una perogrullada, pero así espero haberlo aclarado…

Por lo tanto, esos tres números son la expresión de (1,2,1) en la base B. Es decir, que tenemos que:

$$(1,2,1)_C = (1,0,0)_B$$

La matriz de cambio de base de B a la canónica será la que me transforme $(1,0,0)_B$ en $(1,2,1)_C$, la que me transforme $(0,1,0)_B$ en $(0,1,2)_C$ y la que me transforme $(0,0,1)_B$ en $(1,2,3)_C$, es decir, que la identidad de cambio de base de B a C cumple que:

$$\begin{gathered} f(1,0,0) = (1,2,1) \\ f(0,1,0) = (0,1,2) \\ f(0,0,1) = (1,2,3) \end{gathered}$$

Pero eso es precisamente lo que necesitamos para, poniéndolos en vertical, hallar su matriz ¿no?. Por lo tanto sabemos que:

$$Id_{B\to C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si todo esto os ha parecido muy largo o muy lioso, siempre tenéis el método "cierro los ojos y tiro p'adelante", que consiste en aprenderse de memoria que:

> **RECETA:**
> Si cojo los tres vectores de la base B (en la que quiero expresar la aplicación lineal) y los pongo en vertical uno tras otro, esa es la matriz de cambio de base de B a la canónica"

Y con eso ya sigo…

Y ahora sólo necesitamos su inversa (la calculo con la wiris que si no se hace muy largo):

$$Id_{C\to B} = Id_{B\to C}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Y, para acabar la parrafada, sólo nos queda hacer el producto de las tres matrices para ver que la matriz realmente diagonaliza (otra vez la wiris):

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Y que como podéis comprobar, tiene en la diagonal principal los tres valores propios.