INTEGRACIÓN POR PARTES. CAPÍTULO 2.

Una vez ya dominamos la integración por partes, vamos a ver un caso concreto que utiliza un pequeño truco. Se trata de la integral del producto de una exponencial por un seno (o por un coseno), integral bastante famosa y que vale la pena saber resolver. Lo haremos, como siempre a través de un ejemplo.

Supongamos que tenemos:

$$I = \int e^{2x} \cdot \sin x \cdot dx$$

Pues la forma de resolverlo es mediante la integración por partes. Hagamos como siempre, es decir, llamemos a cada cosa por su nombre.

$$\begin{aligned} u = e^{2x} \qquad &\Rightarrow \qquad du = 2 \cdot e^{2x} \cdot dx \\ dv = \sin x \cdot dx \qquad &\Rightarrow \qquad v = \int \sin x \cdot dx = -\cos x \end{aligned}$$

Con esto, al aplicar la fórmula tenemos:

$$I = e^{2x} \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot 2 \cdot e^{2x} \cdot dx = -\cos x \cdot e^{2x} + 2 \cdot \int e^{2x} \cdot \cos x \cdot dx \qquad (1)$$

Como es habitual al integrar por partes, tenemos la tentación de decir, pues vaya, no avanzamos, hemos cambiado el seno por un coseno y la expresión es más complicada…., pero nos equivocaríamos. La maldita integral no sabe que nosotros somos “inasequibles al desaliento”, y que vamos a continuar. Hagamos esta segunda integral:

$$\int e^{2x} \cdot \cos x \cdot dx$$

La haremos también por partes, llamando:

$$\begin{aligned} u = e^{2x} \qquad &\Rightarrow \qquad du = 2 \cdot e^{2x} \cdot dx \\ dv = \cos x \cdot dx \qquad &\Rightarrow \qquad v = \int \cos x \cdot dx = \sin x \end{aligned}$$

Con lo que nos queda:

$$\int e^{2x} \cdot \cos x \cdot dx = e^{2x} \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 2 \cdot e^{2x} \cdot dx = e^{2x} \cdot \sin x - 2 \cdot \int \sin x \cdot e^{2x} \cdot dx$$

Si ahora sustituimos este resultado en (1), tenemos:

$$\begin{aligned} I &= -\cos x \cdot e^{2x} + 2 \cdot \left[e^{2x} \cdot \sin x - 2 \cdot \int \sin x \cdot e^{2x} \cdot dx \right] \\ &= -\cos x \cdot e^{2x} + 2 \cdot \sin x \cdot e^{2x} - 4 \cdot I \end{aligned}$$

Y aquí está el truco. He llamado I a la integral que teníamos que calcular porque sabía que me iba a aparecer otra vez (el seno y el coseno son el uno la derivada del otro a excepción de un signo. Al hacerlo dos veces ocurre esta pequeña maravilla). Por lo tanto, ahora puedo “despejar” I, y me queda:

$$5 \cdot I = = -\cos x \cdot e^{2x} + 2 \cdot \sin x \cdot e^{2x} = e^{2x} \cdot (2 \cdot \sin x - \cos x)$$

Por lo tanto:

$$I = \int e^{2x} \cdot \sin x \cdot dx = \frac{e^{2x} \cdot (2 \cdot \sin x - \cos x)}{5}$$

¿Qué os ha parecido?