MATRIZ DE UNA APLICACIÓN LINEAL. 2 PROCEDIMIENTOS.

Uno de los problemas más habituales del Álgebra es cuando te dan una aplicación lineal (definida como Dios les dé a entender) y te piden que encuentres su matriz. Evidentemente, la expresión de esa matriz dependerá de las bases en las que estemos trabajando, pero generalmente la expresaremos en las canónicas. Yo voy a centrarme en dos casos tipo, que suelen ser los que aparecen en los problemas y los exámenes.

PRIMER CASO

La aplicación lineal viene definida por su expresión algebraica, es decir, nos la definen como, por ejemplo:

$$f: R^3 \to R^3 \quad f(x,y,z) = (2x - y + z, 3x - y + 2z, 2y - z)$$

Este caso es sencillísimo, ya que nosotros ya sabemos que, una vez tengamos calculadas las imágenes de los tres vectores de la base canónica, esas imágenes, puestas en vertical, nos darán las columnas de la matriz que buscamos. Así que, vamos a calcular esas imágenes:

$$f(1,0,0) = (2 \cdot 1 - 0 + 0, 3 \cdot 1 - 0 + 2 \cdot 0, 2 \cdot 0 - 0) = (2, 3, 0)$$
$$f(0,1,0) = (2 \cdot 0 - 1 + 0, 3 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot 0, 2 \cdot 1 - 0) = (-1, -1, 2)$$
$$f(0,0,1) = (2 \cdot 0 - 0 + 1, 3 \cdot 0 - 0 + 2 \cdot 1, 2 \cdot 0 - 1) = (1, 2, -1)$$

Por lo tanto, la matriz pedida es:

$$A = \begin{pmatrix} f(c_1) & f(c_2) & f(c_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

SEGUNDO CASO

En este caso, la aplicación lineal no nos la definen con una fórmula ni con la imagen de los vectores de la canónica, sino que nos la definen con la imagen de los vectores de otra base (siempre se les ocurre alguna forma de complicarlo, ¿verdad?). Bueno, que no cunda el pánico. En este caso haremos uso de que se trata de una aplicación LINEAL y asunto resuelto. Supongamos, por ejemplo, que nos definen nuestra aplicación lineal mediante:

$$g(2,1) = (-1, 1)$$
$$g(-1,2) = (3, -2)$$

Estos vectores no tienen nada que ver con la canónica!!!, sin embargo, como que es una aplicación lineal podemos escribir:

$$g(2,1) = 2 \cdot g(1,0) + 1 \cdot g(0,1) = (-1,1)$$

$$g(-1, 2) = -1 \cdot g(1,0) + 2 \cdot g(0,1) = (3, -2)$$

Fijaos bien. Ahora tenemos un sistema de dos ecuaciones vectoriales con dos incógnitas vectoriales (que son g(1,0) y g(0,1)). Lo podemos resolver directamente así haciendo "la primera más dos veces la segunda" y nos queda:

$$2 \cdot g(1,0) + 1 \cdot g(0,1) + 2 \cdot [-1 \cdot g(1,0) + 2 \cdot g(0,1)] = (-1,1) + 2 \cdot (3,-2)$$

Es decir:

$$5 \cdot g(0,1) = (5,-3) \qquad \Rightarrow \qquad g(0,1) = (1, \frac{-3}{5})$$

Si ahora sustituyo en la primera, me queda:

$$2 \cdot g(1,0) + \left(1, \frac{-3}{5}\right) = (-1,1) \qquad \Rightarrow \qquad 2 \cdot g(1,0) = \left(-2, \frac{8}{5}\right) \qquad \Rightarrow \qquad g(1,0) = \left(-1, \frac{4}{5}\right)$$

Por lo tanto, la matriz pedida es:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

A algunos no les gusta eso de operar con ecuaciones vectoriales. Bueno, eso no es ningún problema. Si hemos llegado a:

$$\begin{gathered} 2 \cdot g(1,0) + 1 \cdot g(0,1) = (-1,1) \\ -1 \cdot g(1,0) + 2 \cdot g(0,1) = (3,-2) \end{gathered}$$

Lo único que hemos de recordar es que nuestras incógnitas son vectores de dimensión 2, por lo tanto podemos decir que:

$$\begin{gathered} g(1,0) = (a,b) \\ g(0,1) = (c,d) \end{gathered}$$

Y por lo tanto, nuestro sistema se convierte en:

$$\begin{gathered} 2 \cdot (a,b) + 1 \cdot (c,d) = (-1,1) \\ -1 \cdot (a,b) + 2 \cdot (c,d) = (3,-2) \end{gathered}$$

Si ahora desarrollamos por componentes tenemos 4 ecuaciones con 4 incógnitas, pero lo cierto es que es mucho más sencillo que eso, ya que las ecuaciones nos agrupan las incógnitas "dos a dos":

$$\begin{gathered} 2a + c = -1 \\ 2b + d = 1 \\ -a + 2c = 3 \\ -b + 2d = -2 \end{gathered} \qquad \Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} 2a + c = -1 \\ -a + 2c = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2b + d = 1 \\ -b + 2d = -2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Y los podemos resolver por separado…

$$\begin{cases} 2a + c = -1 \\ -a + 2c = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = 2c - 3 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot (2c - 3) + c = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{gathered} c = 1 \\ a = 2 \cdot 1 - 3 = -1 \end{gathered}$$

Y por otro lado:

$$\begin{cases} 2b + d = 1 \\ -b + 2d = -2 \end{cases} \Rightarrow \quad d = 1 - 2b \quad \Rightarrow \quad -b + 2 \cdot (1 - 2b) = -2 \quad \Rightarrow \quad -5b = -4$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad d = 1 - 2 \cdot \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{-3}{5}$$

Por lo tanto, podemos escribir nuestros vectores:

$$g(1,0) = (a, b) = \left(-1, \frac{4}{5}\right)$$
$$g(0,1) = (c, d) = \left(1, \frac{-3}{5}\right)$$

Que lógicamente, coinciden con la otra solución.