La segunda parte de lo que hay que saber sobre las aplicaciones lineales es el tema de la diagonalización, o lo que es lo mismo, los valores y vectores propios. De todo lo que voy a escribir, lo difícil es demostrarlo pero, como que a vosotros no os lo piden, vamos directamente a las recetas y a tomar viento. ¿OK?

Partimos de que ya hemos entendido lo del cambio de bases y cómo se calculan las matrices de la aplicación cuando se cambian las bases. Pues resulta que, si tenemos un ENDOMORFISMO, es decir, una aplicación lineal que va de un determinado espacio a ESE MISMO ESPACIO, entonces, a veces, hay una base que es mamamaravillosa y que cuando hacemos el cambio a esa base nos deja la matriz de la aplicación con forma de matriz diagonal. Esa base, cuando existe, es la formada por los vectores propios de la aplicación lineal.

Ahora viene la pregunta del millón: ¿Qué connnnio es un vector propio? Pues un vector propio es el que cumple que:

$$\begin{pmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Es decir, que al multiplicar la matriz por el vector (es decir, al calcular f(v)) obtenemos un resultado que es lo mismo que multiplicar UN NÚMERO (λ, que se llama valor propio) por el vector. Ya os digo que la demostración de que los vectores propios son una base es difícil, igual que la de que los vectores propios de valores propios diferentes son L.I. Como no os la piden, pasamos de ello. Por lo tanto:

RECETA:

Cuando nos piden diagonalizar una matriz o calcular sus valores y vectores propios, lo que hacemos es calcular:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

Esto nos da un polinomio en λ y le calculamos las raíces. Entonces nos encontramos ante tres posibles casos:

a) Hay raíces complejas: Por lo tanto la matriz no es diagonalizable. FIN.
b) Todas las raíces son reales y simples: Es diagonalizable. Los valores propios son esas raíces que hemos encontrado y para calcular los vectores propios resolvemos (para cada valor propio) el sistema homogéneo asociado. Encontraremos, para cada valor propio, un vector que nos genera las soluciones y el conjunto de todos esos vectores propios es la base que hace que la matriz diagonalice. FIN.
c) Todas las raíces son reales pero hay alguna múltiple. Este es el caso PERRRRO y por lo tanto es el que os saldrá en el examen. Pues…. Hay que seguir trabajando. Lo primero que hacemos es resolver (para cada valor propio) el sistema homogéneo asociado. Los valores propios de multiplicidad 1 nos darán un vector propio cada uno. Los valores de multiplicidad mayor…. Nos darán un vector propio o más. Entonces, lo que hay que comprobar es: ¿Cuántos vectores propios me da ese determinado valor propio? Si coinciden con la multiplicidad del valor propio, entonces es diagonalizable. FIN. Si me da menos vectores propios que la multiplicidad, entonces no es diagonalizable. FIN.

La verdad es que no hay más. Lo único que os puede liar es calcular el determinante (y encontrar sus raíces) o resolver el sistema homogéneo asociado. Todo lo demás es muy mecánico.

Vamos a ver un ejemplo. Nos dan la aplicación lineal f: $R^3 \rightarrow R^3$ que está definida por la matriz A siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Y como siempre nos preguntan si es diagonalizable y que hallemos sus vectores y valores propios. Pues bien, aplicamos la receta. Lo primero es calcular el polinomio característico de la aplicación lineal:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot [(1-\lambda) \cdot (-\lambda) - 2]$$
$$= (2-\lambda) \cdot (-\lambda + \lambda^2 - 2) = 0$$

Al solucionar esta última igualdad (por la formulita de Cardano-Bieta que todos conocemos) vemos que los valores propios son 2, -1 y 2. Es decir, -1 (simple) y 2 (doble). Vaya hombre!!!! Resulta que estamos en el caso c), ¡¡¡qué mala suerrrrrte!!!!

Bueno, ahora sólo nos queda calcular los vectores propios y mirar las dimensiones de los subespacios que nos generan.

En el caso λ=-1 nos queda:

$$(A - (-1) \cdot I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al resolver nos queda:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

Y despejando tenemos:

$$\begin{cases} y = -2x \\ x - 2x + 3z = 0 \ \Rightarrow \ z = {}^{x}/_{3} \end{cases}$$

Por lo tanto, dando valor x=3 tenemos un vector propio que es (3, -6, 1).

Ahora vamos a ver el caso λ = 2. Recordad que esta raíz tenía multiplicidad 2. Tenemos que:

$$(A - 2 \cdot I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al resolver nos queda:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Y despejando tenemos:

$$\begin{cases} x = y = 0 \\ z \ puede \ valer \ lo \ que \ quiera \end{cases}$$

Por lo tanto, el vector generador es (0, 0, 1).

Aquí ya vemos que SÓLO TENEMOS UN VECTOR, por lo que este subespacio es de dimensión 1 cuando la raíz tenía multiplicidad 2. Por lo tanto: NO ES DIAGONALIZABLE.

Y yassstá