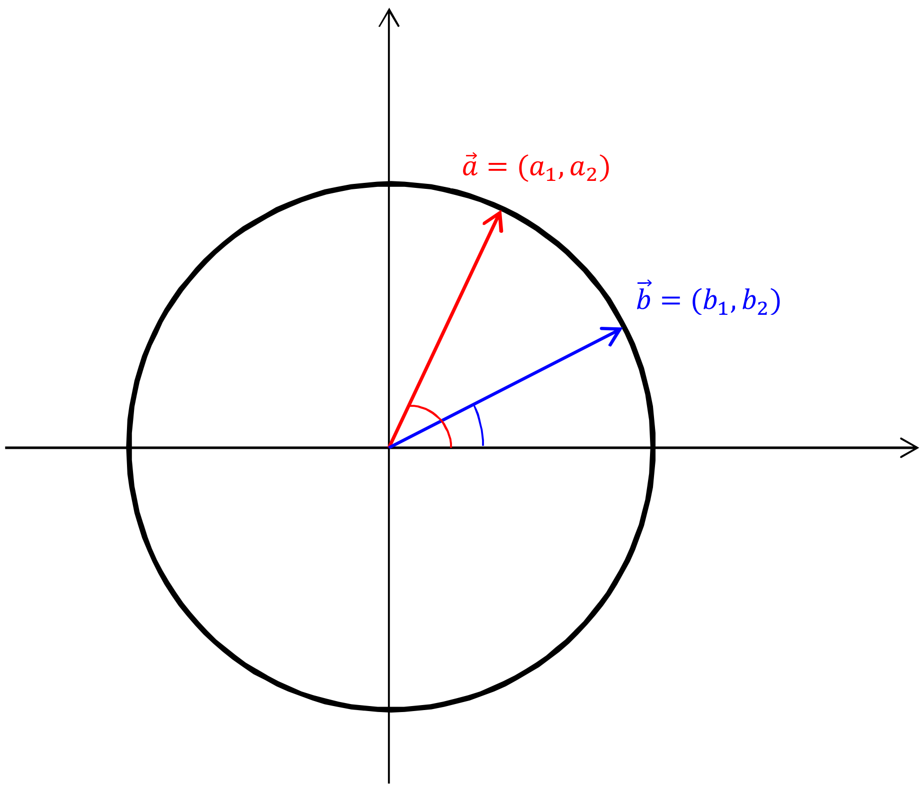
TRABALENGUAS DE SENOS Y COSENOS

Si recordamos del álgebra, todos sabemos dos formas de calcular el producto escalar de dos vectores. Por un lado está el "producto por componentes" y por otra está aquello de "producto de módulos por el coseno del ángulo que forman". Todo esto, traducido al lenguaje de los mortales quiere decir que si tenemos dos vectores $\vec{u}$=(a,b) y $\vec{v}$=(c,d) el producto escalar lo podemos expresar como:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} a\cdot c + b\cdot d \\ |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta \end{cases}$$

Siendo θ el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Vamos a centrarnos ahora en unos vectores muy especiales. Vamos a dibujar el círculo unidad (círculo de radio 1) y centrado en el origen, y vamos a considerar dos vectores del primer cuadrante $\vec{a}$ y $\vec{b}$ que forman con el eje x los ángulos a y b.



Recordemos que, como que estamos en el círculo unidad, el módulo de estos dos vectores es 1 y que, además, podemos afirmar que:

$$\cos a = \frac{a_1}{|\vec{a}|} = \frac{a_1}{1} = a_1 \qquad y \qquad \operatorname{sen} a = \frac{a_2}{|\vec{a}|} = \frac{a_2}{1} = a_2$$

Y del mismo modo:

$$\cos b = \frac{b_1}{|\vec{b}|} = \frac{b_1}{1} = b_1 \qquad y \qquad \operatorname{sen} b = \frac{b_2}{|\vec{b}|} = \frac{b_2}{1} = b_2$$

Por lo tanto, podemos escribir nuestros vectores como:

$$\vec{a} = (\cos a\,, sen\ a)$$
$$\vec{b} = (\cos b, sen\ b)$$

Y si ahora planteamos las dos formas de hacer el producto escalar de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, tenemos:

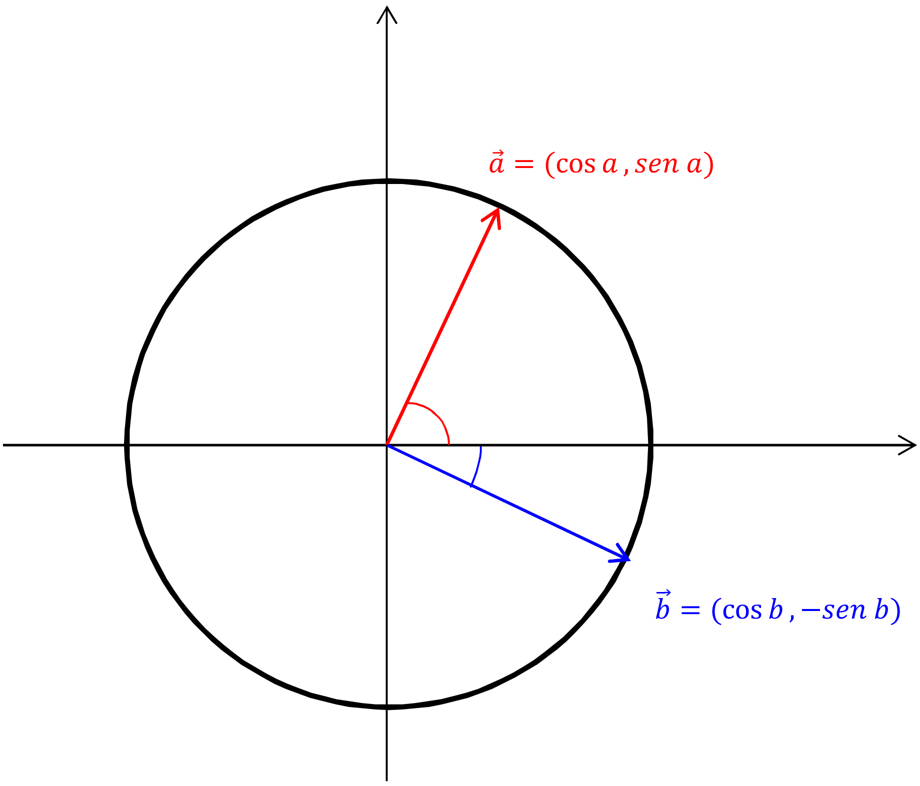
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{cases} \cos a\cdot\cos b + sen\ a\cdot sen\ b \\ |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta = 1\cdot 1\cdot\cos(a-b) \end{cases}$$

Al igualar una con otra tenemos que:

$$\boldsymbol{\cos(a-b) = \cos a\cdot\cos b + sen\ a\cdot sen\ b}$$

Que es una de las fórmulas más importantes de las matemáticas, ya que es la madre de todas las que vienen a continuación.

Por ejemplo, si en lugar del vector que forma el ángulo b con la horizontal consideramos el vector que forma –b con la horizontal, ¿qué tenemos?



El ángulo que forman ahora es a-(-b), es decir a+b. Si planteamos las dos formas de hacer el producto escalar nos encontramos con que:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{cases} \cos a\cdot\cos b - sen\ a\cdot sen\ b \\ |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta = 1\cdot 1\cdot\cos(a+b) \end{cases}$$

Al igualar una con otra tenemos que:

$$\boldsymbol{\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - sen\, a \cdot sen\, b}$$

Y ya tenemos las dos fórmulas del coseno. Ahora, para hallar las del seno, vamos a tomar las fórmulas que ya hemos encontrado y las vamos a "derivar respecto a a", es decir, vamos a considerar a como nuestra variable y supondremos b constante, así que, al derivar la primera tenemos:

$$-sen\,(a-b) = -sen\, a \cdot \cos b + \cos a \cdot sen\, b$$

Si ahora multiplicamos a lado y lado por -1, obtenemos la tercera de nuestras fórmulas:

$$\boldsymbol{sen\,(a-b) = sen\, a \cdot \cos b - \cos a \cdot sen\, b}$$

Y si hacemos lo mismo con la segunda ecuación, al derivar a lado y lado tenemos:

$$-sen\,(a+b) = -sena \cdot \cos b - \cos a \cdot sen\, b$$

Y multiplicando por -1 a ambos lados obtenemos la cuarta de las fórmulas:

$$\boldsymbol{sen\,(a+b) = sen\, a \cdot \cos b + \cos a \cdot sen\, b}$$

Ya sé que estáis casi al límite, pero si aguantáis un poco más llegamos al final. Ahora sólo nos queda, para llegar a la fórmula que relaciona el ángulo con el ángulo doble, fijarnos en las fórmulas 2 y 4 y nos preguntamos ¿qué pasa si a=b?. Pues que, en la fórmula 2 tenemos…

$$\cos(a+a) = \cos a \cdot \cos a - sen\, a \cdot sen\, a \qquad \Rightarrow \qquad cos\, 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

Y esto lo podemos desarrollar mediante el teorema fundamental de la trigonometría, en función del seno o del coseno:

$$\boldsymbol{\cos 2a} = \begin{cases} \cos^2 a - (1-\cos^2 a) = \boldsymbol{2 \cdot cos^2 a - 1} \\ (1-\sin^2 a) - \sin^2 a = \boldsymbol{1 - 2 \cdot \sin^2 a} \end{cases}$$

Y en la fórmula 4 tenemos…

$$sen\,(a+a) = sen\, a \cdot \cos a + \cos a \cdot sen\, a \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{sen\, 2a = 2 \cdot sen\, a \cdot cos\, a}$$

Ya casi hemos terminado. Cuando tenemos que integrar los cuadrados del seno y del coseno se utiliza un último paquete de fórmulas que salen de las de cos 2a. Si os fijáis bien, podemos despejar tanto el cuadrado de cos a como el cuadrado del sen a y tenemos:

$$\cos 2a = 2 \cdot cos^2 a - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}}$$
$$\cos 2a = 1 - 2 \cdot \sin^2 a \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}}$$

Que son las fórmulas que se utilizan para integrar los cuadrados del seno y del coseno, y es a donde queríamos llegar.

Así pues, las formulitas que conviene saber para "hacer matemáticas" son (para aquellos que son amigos de memorizar):

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + sen\, a \cdot sen\, b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - sen\, a \cdot sen\, b$$

$$sen\,(a-b) = sen\, a \cdot \cos b - \cos a \cdot sen\, b$$

$$sen\,(a+b) = sen\, a \cdot \cos b + \cos a \cdot sen\, b$$

$$\cos 2a = \begin{cases} 2 \cdot cos^2 a - 1 \\ 1 - 2 \cdot \sin^2 a \end{cases}$$

$$sen\, 2a = 2 \cdot sen\, a \cdot cos\, a$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

Aunque yo soy más partidario de “entender de dónde vienen”, que de “saturar la memoria”.

Yatá.