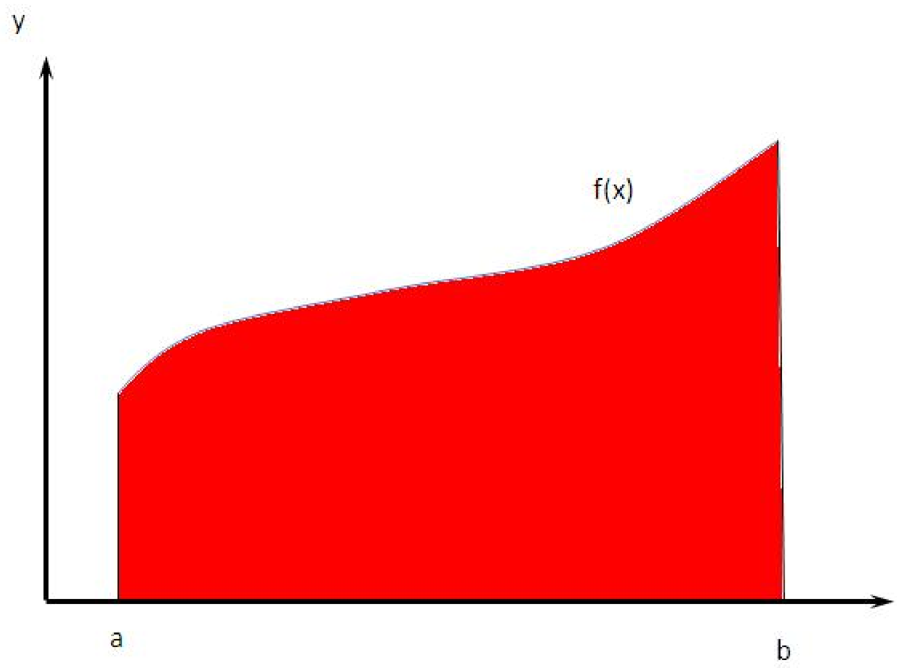
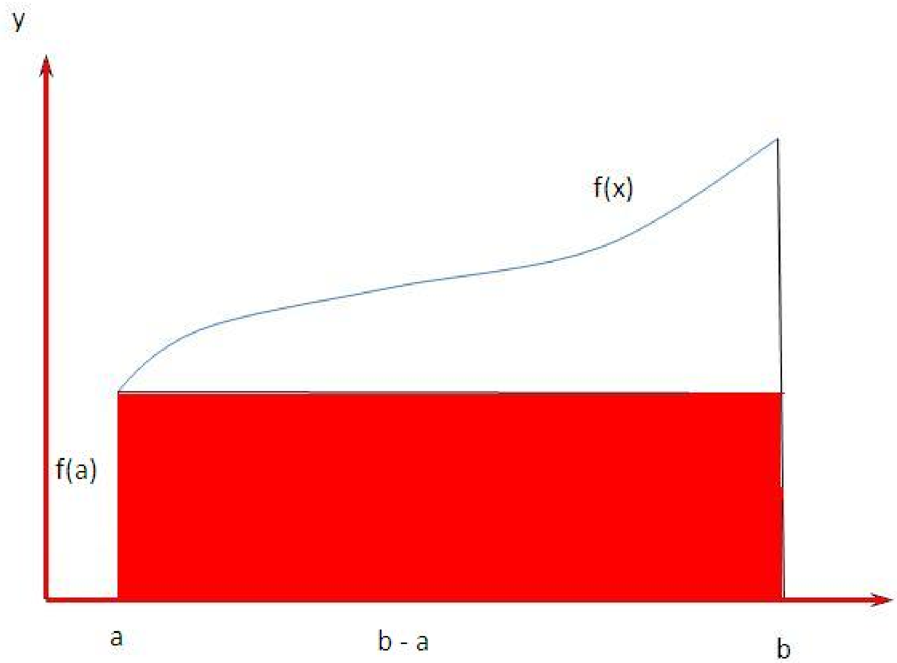
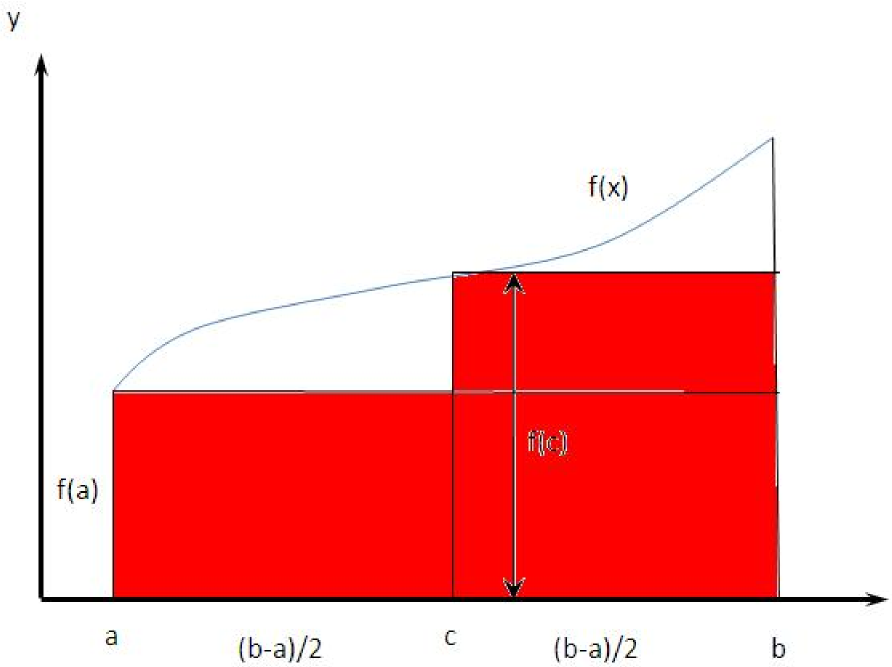
Bueno, para empezar, lo que hay que saber de las integrales es que son la operación inversa de las derivadas y que nacieron para facilitar el cálculo de áreas y volúmenes. El ejemplo más típico es el de calcular el área que encierra una función con el eje de las x y las rectas verticales que pasan por dos puntos, a y b. Ver figura.



La primera aproximación que se puede hacer para calcular esta área es multiplicar el ancho del intervalo [a,b], es decir (b-a) por f(a). Así calculas el área del rectángulo que os dibujo.



Luego, algún listillo dijo, si en vez de un rectángulo, cojo dos, tendré menos error, y calculó el área utilizando el punto medio “c” y multiplicó f(a) · (b-a)/2 + f(c) · (b-a)/2.



…Y de ahí a calcular el área con “muchos” rectángulos, de anchura cada vez menor y pasar al límite con infinitos rectángulos de anchura 0….ya tienes la definición de integral. Por eso la fórmula para calcular el área entre dos puntos a y b es:

$$S = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Es decir, haces la suma (el símbolo de integral es una especie de S que viene de “sum”, y se lo debemos a Sir Isaac Newton) de los productos de f(x) por “diferenciales de x” (es decir, cachitos de x muy pequeñitos, que tienden a cero).

Para integrar hay tres métodos y un truquillo.

El **primer método** es las integrales directas (toma método!!!!, te aprendes de memoria las tablas de integrales inmediatas y a tomar viento….)

Por ejemplo:

$$\int sen\, x\; dx = -\cos x$$

$$\int x^2\; dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

… y así hasta decir basta.

El **segundo método** es el cambio de variable. Es el "paralelo" a la regla de la cadena. Se utiliza cuando tienes una expresión que "sabes integrar" pero no con x, sino con una función de x (y a veces con su derivada por en medio).

Por ejemplo:

$$\int 4 \cdot (\sin x)^3 \cdot \cos x \, dx$$

Lo que haces es un cambio de variable. Llamas t = "la función de x que molesta", en este caso llamamos t = sin x. Como además de x aparece dx hay que derivar esta igualdad. Por lo tanto tenemos que dt (que es como llamamos a la derivada), repito, dt = cos x · dx.

¡Ahí va!, ¡qué casualidad!, resulta que tenemos cos x · dx en nuestra integral!!!!, Así que al sustituir te queda:

$$\int 4 \cdot t^3 \cdot dt = 4 \cdot \int t^3 dt = 4 \cdot \frac{t^4}{4} = t^4 = (\sin x)^4$$

Y ya tá.

El **tercer método** es la Integración por partes, que nace de la fórmula para la derivada del producto:

u' · v + u · v' = (u · v)'

Si despejas…

u · v' = (u · v)' – u' · v

Si ahora pones integrales y en vez de u' pones du y en vez de v' pones dv y además recuerdas que derivada e integral son inversas la una de la otra (y pasa como con raíz cuadrada y elevar al cuadrado, que "se tachan" el uno con la otra)….

$$\int u \cdot dv = \int (u \cdot v)' - \int v \cdot du$$

Y "tachando", queda la fórmula famosa:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Y que se recuerda con la frase "un día vi un viejo vestido de uniforme" (yo prefiero la versión del viejo, aunque sé que a algunos os parece más graciosa la de la vaca…Es cuestión de gustos).

Este método se usa cuando tienes un producto de funciones y una de las funciones se simplifica al derivar, y la otra o permanece igual (por ejemplo la exponencial) o cambia poquito (por ejemplo senos y cosenos, que van alternando…)

Por ejemplo, tienes:

$$\int x^2 \cdot \cos x \, dx$$

Aquí tienes una función que, cuando la derives se te irá simplificando (la x^2) y otra que cuando la integres te "cambiará poquito", como el coseno. Por lo tanto, hay que asignar lo que es u y lo que es v (de hecho asignas lo que es dv, pero por integración inmediata ya defines v). Es decir:

$$\int x^2 \cdot \cos x \, dx = \cdots$$

Aquí hacemos:

$$\begin{cases} u = x^2, por\ lo\ tanto\ du = 2 \cdot x \cdot dx \\ dv = \cos x \cdot dx\, , por\ lo\ tanto\ \ v = \int \cos x \cdot dx = \sin x \end{cases}$$

$$\ldots = x^2 \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 2x \cdot dx = x^2 \cdot \sin x - 2 \cdot \int x \cdot \sin x \cdot dx = \cdots (2)$$

Fíjate que esta última integral es casi como la primera, sólo que es más sencilla (la x no está elevada al cuadrado) y hay un sin en vez de un cos. Aplicas otra vez la integral por partes a esta segunda integral y tienes:

$$\int x \cdot \sin x \cdot dx = \ldots$$

Aquí hacemos:

$$\begin{cases} u = x, por\ lo\ tanto\ du = dx \\ dv = \sin x \cdot dx\, , por\ lo\ tanto\ \ v = \int \sin x \cdot dx = -\cos x \end{cases}$$

$$\ldots = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x \cdot dx = -x \cdot \cos x + \sin x$$

Sustituyendo en (2) nos queda que:

$$\ldots (2) = x^2 \cdot \sin x - 2 \cdot [-x \cdot \cos x + \sin x] = x^2 \cdot \sin x + 2 \cdot x \cdot \cos x - 2 \cdot \sin x$$

Parece un coñazo, pero no lo es tanto….

Por último, falta **el "truquillo"**, que se conoce con el nombre de "la derivada logarítmica" y que se basa en la fórmula de la derivada de ln x:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Y que en el caso de ser el logaritmo de una función se convierte (por la regla de la cadena) en:

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot du = \frac{du}{u}$$

Si lo ponemos al revés e integramos, tenemos que….

$$\int \frac{du}{u} = \int (\ln u)' = \ln u$$

Por lo tanto, a veces te pueden poner una integral que parece muy perra, pero sólo con ver que lo de "arriba" es la derivada de lo de "abajo", lo resuelves de forma directa….Por ejemplo:

$$\int \frac{(3x^2 - 6x + 8) \cdot dx}{x^3 - 3x^2 + 8x - 16} = \ln|x^3 - 3x^2 + 8x - 16|$$

Y se pone entre valores absolutos porque los logaritmos no existen para números negativos….

Otro ejemplo muy típico es:

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \int \frac{1/x}{\ln x}\, dx = \ln|\ln|x||$$

Que se resuelve de esta manera porque 1/x es la derivada de ln x y te queda el logaritmo del valor absoluto del logaritmo del valor absoluto de x.

Bueno, creo que con esto ya tenéis para trabajar un rato….