Para explicar tres ideas básicas sobre aplicaciones lineales, me voy a servir de un problema concreto que me inventaré.

Supongamos que nos dicen que tenemos una aplicación lineal de R^4 en R^2 y que nos la definen por las imágenes de los cuatro vectores de la base canónica de R^4. Así:

$f(c_1) = f(1, 0, 0, 0) = (1, 1)$

$f(c_2) = f(0, 1, 0, 0) = (-1,3)$

$f(c_3) = f(0, 0, 1, 0)$) $(0, 2)$

$f(c_4) = f(0, 0, 0, 1) = (2, -1)$

Lo primero que hacemos, para calcular la matriz de la aplicación, es ponernos en vertical estos datos así:

$$\begin{pmatrix} f(c_1) & f(c_2) & f(c_3) & f(c_4) \end{pmatrix}$$

Y lo que obtenemos es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora vamos a calcular el núcleo y la imagen de la aplicación lineal y vamos a comprobar el teorema de la dimensión.

Para calcular el núcleo hemos de tener claro que son los vectores del ESPACIO DE SALIDA (por lo tanto de R^4, (x, y, z, t)) cuya imagen es el vector nulo (del espacio de llegada R^2, (0,0)). Se calcula resolviendo el sistema homogéneo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$\begin{cases} x - y + 2 \cdot t = 0 \\ x + 3 \cdot y + 2 \cdot z + \ -t = 0 \end{cases}$$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas. Ya se adivina que la solución va a tener 2 “grados de libertad”, es decir, que me va a depender de dos parámetros (seguramente z y t). Es muy fácil de resolver, por ejemplo por Gauss, poniendo la matriz ampliada y haciendo una transformación muy sencilla para poner un 0 bajo el primer 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Que traducido al lenguaje de los mortales es:

$$\begin{cases} x - y + 2t = 0 \\ 4y + 2z - 3t = 0 \end{cases}$$

Y si despejamos en la segunda y luego sustituimos y despejamos en la primera, tenemos:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{z}{2} - \dfrac{5t}{4} \\ y = -\dfrac{z}{2} + \dfrac{3t}{4} \end{cases}$$

Por lo tanto, ya tengo x e y en función de z y t. Esto también se suele expresar así:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{z}{2} - \dfrac{5t}{4} \\ y = -\dfrac{z}{2} + \dfrac{3t}{4} \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

Como que lo que nos suelen pedir es una base del núcleo, se trata de que demos valores a nuestros parámetros. En este caso yo recomiendo dar z=2 y t=0 para calcular el primer vector y z=0 y t =4 para calcular el segundo. Por lo tanto, la base del núcleo (que será un SUBESPACIO DE R^4), será:

(-1, -1, 2, 0) y (-5, 3, 0, 4)

Que, como se comprueba fácilmente son linealmente independientes y por lo tanto el núcleo de f tiene dimensión 2.

Para calcular la imagen también es muy sencillo. Como que tenemos la imagen de los vectores de la base canónica de R^4, estos 4 vectores serán un sistema de generadores de la imagen de f. Es decir, que los vectores (1, 1), (-1, 3), (0, 2) y (2, -1) son un sistema de generadores de la imagen de f. Fijaos que son vectores de R^2.

¿Son una base? Pues NO. Es imposible ya que son 4 vectores que han de generar un espacio que, como mucho, será de dimensión 2 (R^2 es de dimensión 2). Por lo tanto quiere decir que no son linealmente independientes. Buscamos a ver cuántos vectores linealmente independientes somos capaces de encontrar entre esos 4. Pues es muy fácil:

(1, 1) y (0, 2) son linealmente independientes. Por lo tanto, son una base y ya vemos que la imagen de f será de dimensión 2 (es decir, será todo R^2).

Y de paso podemos comprobar el teorema de la dimensión:

“Teorema de la dimensión. Sea ƒ: U → V una aplicación lineal, se cumple que dim U = dim Ker(ƒ) + dim Im(ƒ).”

Por lo tanto, aquí tenemos que:

dim U = 4 dim Ker (f) = 2 dim Im(f) = 2

Y se cumple que:

4 = 2 + 2