Al resolver problemas, mayoritariamente de análisis matemático, es habitual tener que lidiar con logaritmos y exponenciales, y eso suele confundir a bastantes compañeros ya que no estamos demasiado acostumbrados a ellos. Es por eso que me he decidido a escribir este pdf en el que, sin seguir un proceso demasiado ordenado ni estructurado, vamos a repasar algunas de las propiedades básicas y operaciones comunes.

Lo primero que hay que saberse es la definición de logaritmo, que es:

$$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$$

Así por ejemplo, tenemos que:

$$\log_{10} 100 = 2 \ \ ya\ que\ 10^2 = 100$$

$$\ln 1 = 0\ ya\ que\ e^0 = 1$$

$$\log_2 2 = 1\ ya\ que\ 2^1 = 2$$

$$\log_5 5^6 = 6\ ya\ que\ 5^6 = 5^6$$

Hasta aquí bien ¿no? Esta definición tiene una consecuencia evidente, que es que las potencias y los logaritmos son funciones inversas unas de otras, es decir (para el caso de base e):

$$e^{\ln A} = A \quad y\ también \quad \ln(e^A) = A$$

Es evidente a partir de la definición de logaritmo. Luego resulta que los logaritmos tienen unas propiedades especiales que hay que saberse a velocidad de concurso. Son tres y se enuncian así:

$$\log(A \cdot B) = \log A + \log B$$

$$\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log A - \log B$$

$$\log(A^B) = B \cdot \log A$$

Demostrarlo es muy sencillo a partir de lo anterior. Hago la primera (para el caso de base e) como ejemplo. Supongamos que tenemos:

$$\ln A = a \quad y \ln B = b, por\ definición\ es\ lo\ mismo\ que \quad e^a = A\ \ y\ e^b = B$$

Ahora multiplico A·B, y tengo:

$$A \cdot B = e^a \cdot e^b = e^{(a+b)} = e^{(\ln A + \ln B)}$$

Pero por la definición de logaritmo tenemos que:

$$A \cdot B = e^{(\ln A + \ln B)} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(A \cdot B) = \ln A + \ln B$$

En fin, no creo que os pidan nunca la demostración, pero nunca está de más saber de dónde vienen las cosas. Lo que sí hay que manejar con soltura son la definición de logaritmo, las tres propiedades y el hecho de que sean inversas la una de la otra.

Por ejemplo, hubo un año que en un problema del examen acabó quedando una ecuación del tipo:

$$e^{2x} - 3 \cdot e^{x} + 2 = 0$$

… y cundió el pánico entre el respetable y fue una escabechina. Pero no era tan complicado. Sólo había que darse cuenta de que:

$$e^{2x} = (e^{x})^{2}$$

Y entonces, haciendo el cambio t = e^{x} te queda lo siguiente:

$$t^{2} - 3 \cdot t + 2 = 0$$

Que se soluciona con la fórmula de Cardano-Vieta y sale:

$$t = \frac{-(-3) \pm \sqrt{3^{2} - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} t_1 = \frac{4}{2} = 2 \\ t_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Y una vez llegados aquí, hay que “deshacer el cambio”, es decir:

$$t_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad e^{x_1} = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \ln 2 = 0{,}693$$

$$t_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{x_2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \ln 1 = 0$$

A veces este último paso se hace más sencillo de ver si lo que haces es “tomar logaritmos a ambos lados de la igualdad”, es decir:

$$e^{x_1} = 2 \quad \Rightarrow \quad \ln(e^{x_1}) = \ln(2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \ln 2$$

Tomo logaritmos Son inversas

O al revés, llegas a que la solución de tu problema es cuando:

$$2 = \ln x \quad \Rightarrow \quad e^{2} = e^{\ln x} \quad \Rightarrow \quad e^{2} = x = 7{,}389$$

Tomo exponenciales Son inversas

Eso sí, al aplicar este truco, para poder hacer las exponenciales hay que tener “lo que sea a un lado” y “logaritmo de lo que sea” al otro lado, no podemos tener expresiones mixtas con más de un término.

Un error muy frecuente es el siguiente:

$$1 = \ln(x^2+x) - \ln x \;\Rightarrow\; e^1 = e^{\ln(x^2+x)} - e^{\ln x} = x^2 + x - x = x^2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{e} = \pm 1{,}65$$

Tomo (mal) exponenciales

Y esto está MAL, MUY MAL. Lo correcto es lo siguiente:

$$1 = \ln(x^2+x) - \ln x \quad\Rightarrow\quad 1 = \ln\left(\frac{x^2+x}{x}\right) = \ln(x+1) \quad\Rightarrow\quad e^1 = e^{\ln(x+1)}$$
$$= x+1 \quad\Rightarrow\quad x = e - 1 = 1{,}718$$

Ahora sí, ya tengo
ln(algo) a la derecha

Por último, os remito al pdf sobre "Representación de funciones" donde tenéis unos dibujos aproximados de ambas funciones.