# GENÉRICO SOBRE DERIVADAS

Me parece que todos tenéis ya bastante claro que la derivada de una función nos da, para cada valor de x, la pendiente que tiene la recta tangente a la función en ese punto. Pero…. ¿cómo se llega a eso? ¿De dónde salen esas tablas de derivadas que hemos de memorizar? Es posible que todo lo que viene a continuación lo cataloguéis como “materia que no entra en el examen y que por tanto no me pienso mirar” pero yo siempre he creído que entender las cosas, sus orígenes, sus razones de ser, nos ayuda muchísimo más que aprender de memoria algo que “resetearemos” en cuanto aprobemos el examen.

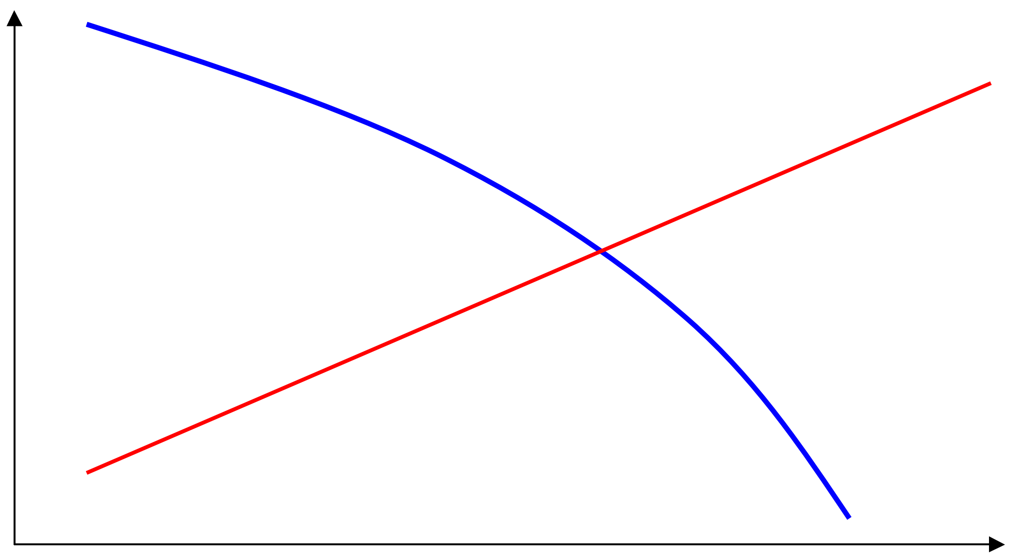
Empecemos por el principio. ¿Cómo definiríais el concepto de recta tangente a una curva?

Ahora lo que os pido es que dejéis de leer y dediquéis 5 segundos a pensar en cómo responderíais esa pregunta. Venga va, haced ese micro-esfuerzo….

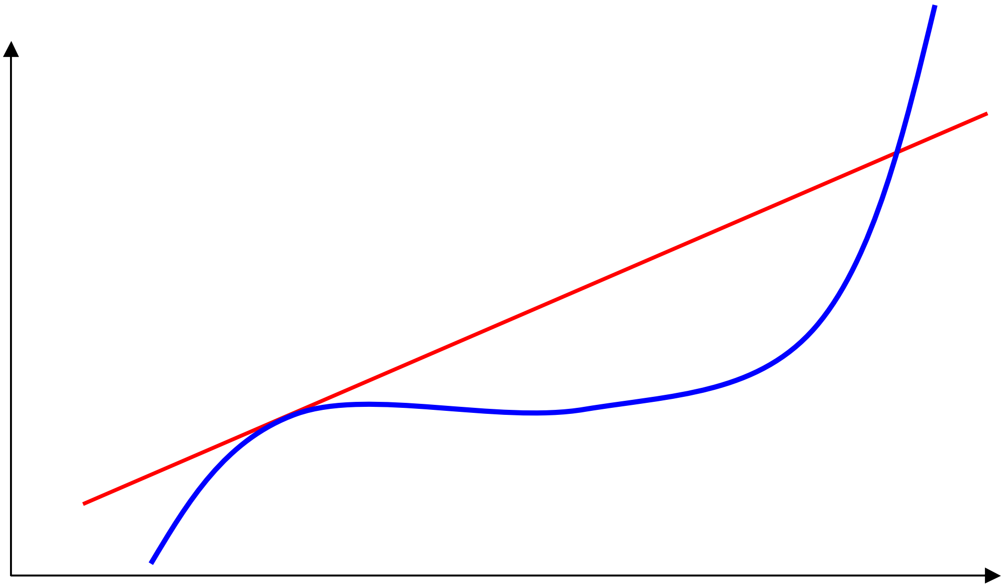
1, 2, 3, 4…… y 5.

Bien, me imagino que la mayoría tiene claro el concepto, pero expresarlo de forma rigurosa no es tan fácil. Ya veréis. Me imagino que la mayoría ha respondido algo parecido a “es aquella que tiene un único punto en común con la función”. De hecho, la Real Academia de la Lengua hace una definición parecida y dice que es “la recta que toca a una curva sin cortarla”.

A todos los que hayáis hecho una definición parecida a la que os he escrito, os presento dos contraejemplos.



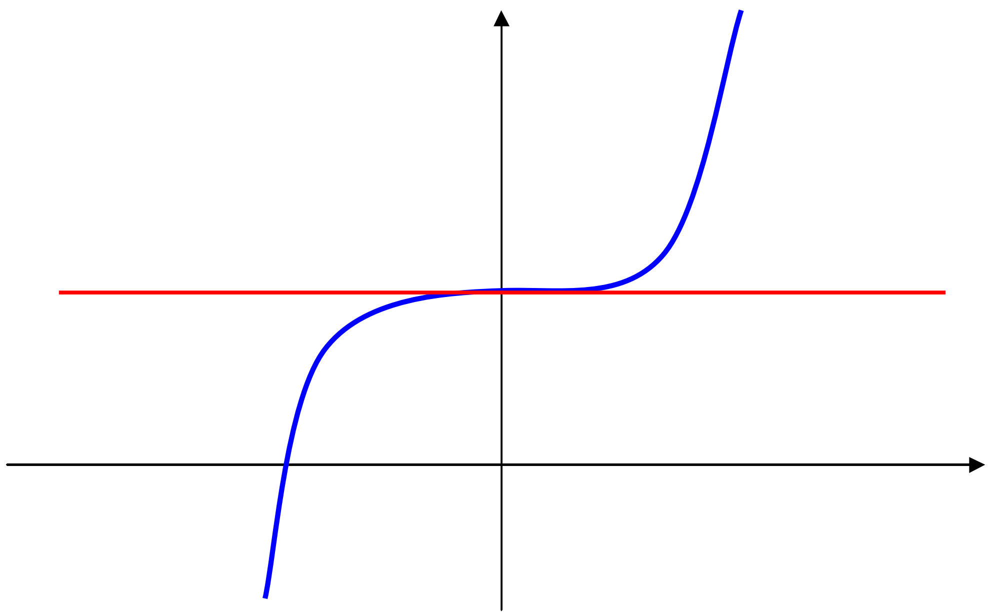
Este es el primer contraejemplo, que sirve para la definición que yo he puesto. Tiene un único punto en común con la función, pero claramente no es una tangente…. No es un contraejemplo para la de la RAE (aunque habría que definir qué es eso de que “no corte”…). Sin embargo, éste que viene ahora sí que lo es para la definición de la RAE.



La recta es tangente en el primer punto, pero…. corta claramente a la función en el segundo. Me imagino que, si ahora os dejara corregir vuestra definición original, ¡¡¡qué coño!!!. Os dejo corregir vuestra definición original, a ver si evitáis estos problemas. Tenéis cinco segundos más para pensar el asunto.

1, 2, 3, 4…. y 5.

Supongo que para corregir el primer contraejemplo la mayoría habrá dicho algo así como "…pero sin cambiar de lado de la curva" o "…sin atravesar la curva", intentando aproximarse a la definición de la RAE. Pero eso no sirve. De hecho la definición de la RAE falla estrepitosamente cuando estamos hablando de la tangente a una curva en uno de sus puntos de inflexión. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3 + 2$ tiene un punto de inflexión en x=0. Y…. ¿cómo se comporta  su tangente?

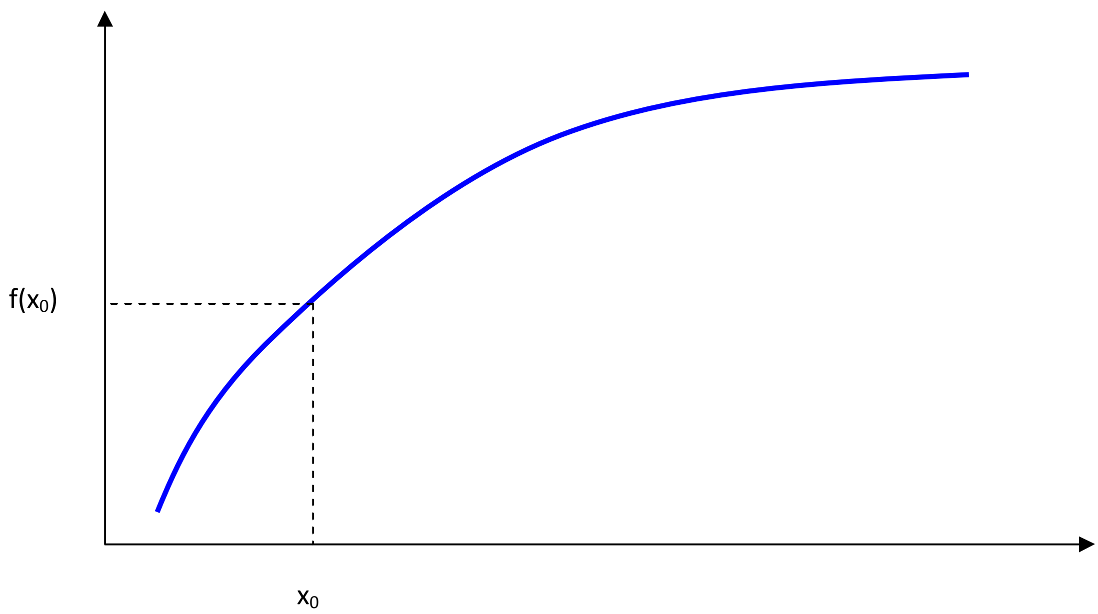


La recta dibujada es tangente en x=0 y, sin embargo, atraviesa la curva…. Ya veis que, definirlo con rigor, no es tan fácil.

Y todavía nos queda un problema por resolver, que es el del contraejemplo 2. ¿Qué hacemos si la recta es tangente en un punto, pero luego corta a la función un poco más allá?

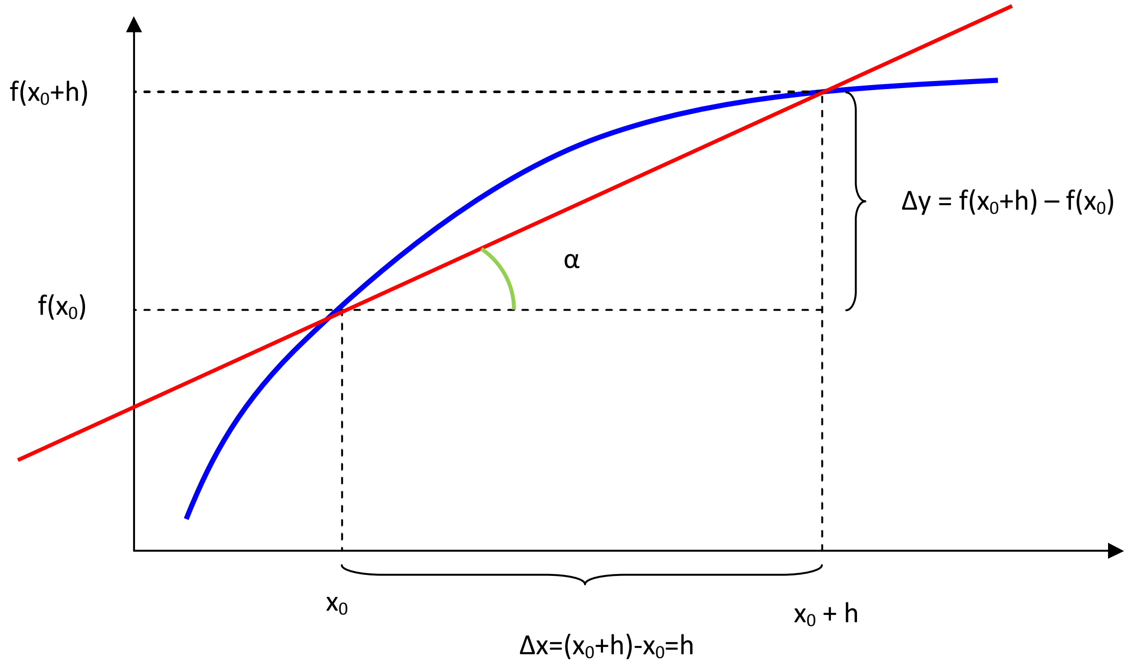
Los que estáis familiarizados con las mates seguro que ya habéis adivinado que los matemáticos resolverán eso de "estar cerca de un punto determinado" con los famosos límites, pero…. ¿cómo se las apañan para definir la tangente en un punto?.

Bien, vamos a construir la definición de tangente como hacen los matemáticos. En primer lugar hacemos este dibujo:




Y lo que vamos a buscar es la definición de recta tangente a la curva en $x_0$. Para hacerlo, lo que hacemos es buscar un punto a la derecha del que ya tenemos y que diste una distancia cualquiera, que llamaremos h. Por lo tanto, ese segundo punto será $x_0 + h$ y la imagen de ese punto será $f(x_0 + h)$. Una vez tengamos todo dibujado, trazaremos la recta que une esos dos puntos (que no será tangente, sino que será lo que en matemáticas se llama una "cuerda" ) y empezaremos a analizar lo que tenemos ahí.

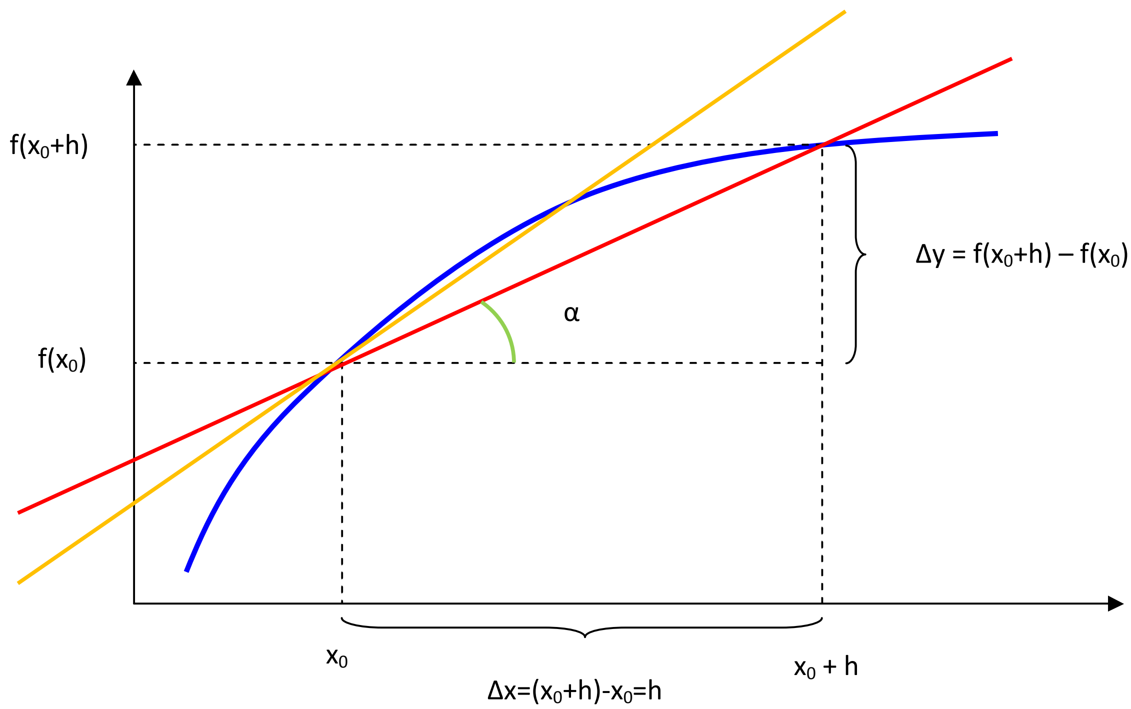
Es decir, que tenemos lo siguiente:



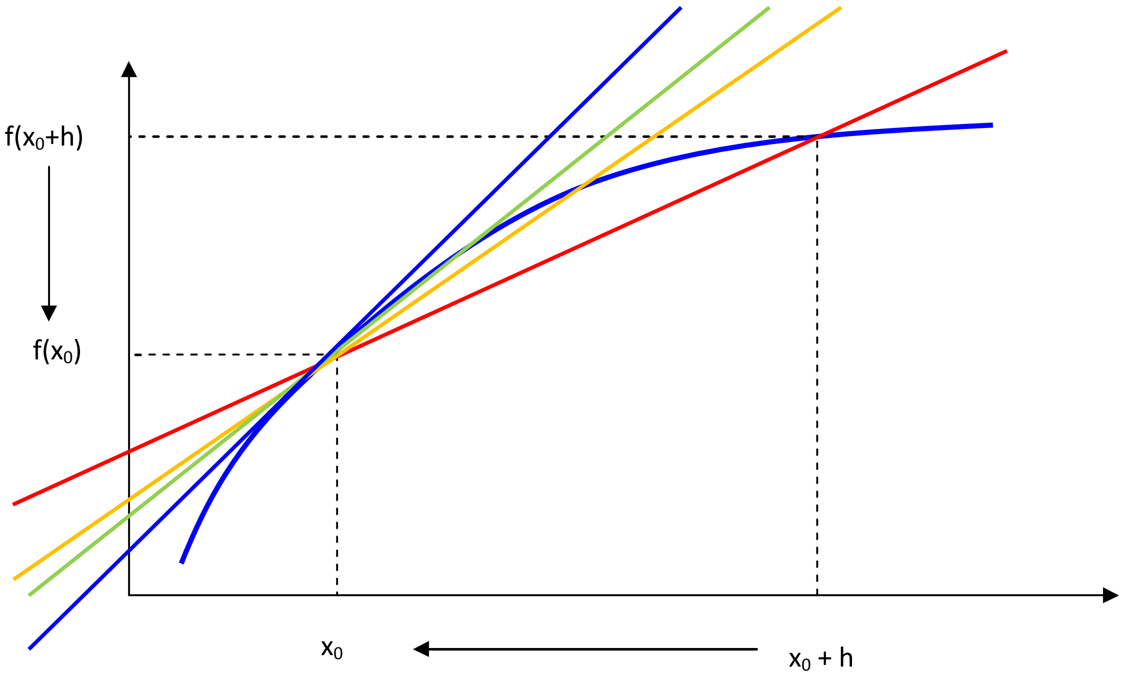

La pendiente de esta recta que nos hemos inventado será precisamente la tangente de alfa, y la podemos expresar en función de $x_0$, h y f, es decir:

$$pendiente = m = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Bueno, ¿y ahora qué?. Pues hacemos lo que los matemáticos llaman "pasar al límite". Ya sabemos que la recta que hemos dibujado no es tangente pero… ¿y si tomamos un punto más cerca de $x_0$?



Esta recta tampoco es tangente, pero…¿y si nos acercamos más a $x_0$? ¿Y si nos acercamos mucho a $x_0$? ¿ Y si nos acercamos tanto a $x_0$ que casi no podemos distinguir $x_0$ de $x_0$+h? Es decir, ¿y si hacemos que h tienda a cero?. Bien, esa es la definición de recta tangente que usan los matemáticos y, de paso, esa es la definición de derivada.




Por lo tanto, la definición matemática de derivada de una función en un punto $x_0$ es:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Y pasar a decir que la derivada de una función existe si existe la derivada, no en un punto $x_0$, sino en cualquier punto es un trámite sencillo que nos lleva a que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Y por extraño que parezca, de esta maravillosa formulita es de donde salen todas las derivadas que os aparecen en las tablas y que tenéis que aprender de memoria y manejarlas a "velocidad de concurso". Ya sé que no forma parte del programa de la asignatura, pero os voy a hacer algún ejemplo para que veáis que es así.

Por ejemplo: Creo que nadie tiene problemas en resolver que la derivada de $x^3$ es $3x^2$, pero ¿de dónde sale? ¿por qué es así? Apliquemos nuestra formulita:

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$$

Ahora desarrollamos utilizando la fórmula del binomio de Newton y tenemos que:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2 \cdot h + 3x \cdot h^2 + h^3 - x^3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 \cdot h + 3x \cdot h^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3x \cdot h + h^2 = 3x^2$$

Con lo cual ya está demostrado. No todas las demostraciones son tan sencillas. Por ejemplo, la temida derivada de un cociente se demuestra así:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{u(x+h)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+h)}{v(x+h)\cdot v(x)}}{h}$$

Ahora sumamos y restamos la misma cantidad y, además, reordenamos, y nos queda:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+h)}{v(x+h)\cdot v(x)\cdot h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{u(x+h)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x)}{h} - \frac{u(x)\cdot v(x+h) - u(x)\cdot v(x)}{h}}{v(x+h)\cdot v(x)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\cdot v(x) - u(x)\cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h}}{v(x+h)\cdot v(x)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v(x+h)\cdot v(x)} = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

Como veis, es un poco más larga, pero sale igual. Si alguno tiene interés en alguna otra, que pregunte, que ya se la pondré.

Así que, recopilando, hemos conseguido demostrar que la derivada de una función es la herramienta que usan los matemáticos para calcular la pendiente de la función en cada punto. Se trata de una propiedad importantísima, ya que los extremos (los puntos candidatos a ser máximos y mínimos) son puntos que precisamente tienen la propiedad de que su derivada es cero, es decir, que tienen pendiente horizontal. Eso es lógico, porque un punto que sea máximo, es decir, la cima de una montaña, no puede tener pendiente positiva (si la tuviera, el punto inmediatamente a su derecha estaría más alto y ya no sería máximo) ni pendiente negativa (si la tuviera, el punto inmediatamente a la izquierda estaría más alto y ya no sería máximo), por lo tanto, la ha de tener igual a cero. Y lo mismo (pero al revés) pasa con los mínimos.

Bueno, os he soltado un rollo impresionante, pero es que hoy me aburría demasiado…..