Un polinomio es una expresión del tipo:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots. + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

Como ves, es una suma de números que multiplican a potencias de x. Los polinomios se pueden sumar, restar, multiplicar… todo bastante sencillo (se suman o restan los términos del mismo grado, o para multiplicar es un poco más largo pero también es fácil).

La operación de dividir polinomios es más larga, pero hay un caso especial que permite hacerlo muy rápido. Se trata de dividir un polinomio por otro de la forma “x-a”. Por ejemplo, dividir por x-2 ó dividir por x+4. En el primer caso a es 2 y en el segundo a es -4. ¿OK?

Pues el método sencillo para dividir por x – a es el método de Ruffini (exacto, es un método para dividir polinomios, pero también sirve para calcular las raíces de un polinomio) y eso es lo que explico aquí. Como explicarlo “de manera abstracta” es un cognazo, lo hago con un ejemplo.

Supongamos que quiero dividir:

$$\frac{x^4 - 3 \cdot x^3 - x + 2}{x - 1}$$

Se puede hacer de la forma larga y tediosa, pero Ruffini ideó un método muy sencillo que vamos a hacer paso a paso. Lo primero es poner el numerador, pero sólo ponemos los coeficientes. Si algún término no está, ponemos 0. Y dibujamos dos rayitas auxiliares. Por lo tanto, tendremos:

	1	-3	0	-1	2

Ya sólo nos falta poner “a” a la izquierda. Fíjate que pongo “a”, teniendo en cuenta que dividimos por “x – a”. ¿Vale?. Como dividimos por x – 1, resulta que a = 1. Por lo tanto nuestra construcción queda:

	1	-3	0	-1	2
1					

Lo primero que hacemos es “bajar el primer coeficiente” (La regla dice “El primer coeficiente del cociente es igual al primer coeficiente del dividendo”, es más fácil verlo como te explico).

	1	-3	0	-1	2
1					
	1				

Ahora lo que hacemos es multiplicar el coeficiente que hemos “bajado” por a (en nuestro caso 1) y lo ponemos debajo del siguiente coeficiente, es decir:

	1	-3	0	-1	2
1		1			
	1				

Ahora sumamos los dos números que tenemos uno encima del otro y lo escribimos debajo:

	1	-3	0	-1	2
1		1			
	1	-2			

Y ahora hacemos lo mismo. Multiplicamos el -2 por 1, lo escribimos y sumamos….

	1	-3	0	-1	2
1		1	-2		
	1	-2	-2		

Y seguimos….

	1	-3	0	-1	2
1		1	-2	-2	
	1	-2	-2	-3	

Y llegamos al final:

	1	-3	0	-1	2
1		1	-2	-2	-3
	1	-2	-2	-3	$\boxed{-1}$

El valor del recuadro es el resto y los números que hay “bajo la línea” son los coeficientes del resultado. Por lo tanto, al dividir $x^4 -3x^3 -x +2$ por x-1 da de resultado $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ y nos sale de resto - 1 (es decir, la división no es exacta, como 7 /3, que da 2 y de resto 1).

Cosas importantes a tener en cuenta.

1.- Si dividimos por x + 2, entonces a será -2 ¿OK?

2.- El resultado de dividir un polinomio de grado 4 por x-a es un polinomio de grado 3 (ver ejemplo). En general, al dividir un polinomio de grado n nos dará un polinomio de grado n-1.

3.- Hay una curiosidad de los polinomios (no la demuestro, os la creéis y ya está). El valor del polinomio P(x) en x=2, es decir P(2) es el resto que se obtiene al dividir P(x) por x-2. Es decir, al hacer Ruffini, el valor del recuadro es el valor del polinomio en x=a. En nuestro ejemplo anterior, si $P(x) = x^4 - 3x^3 - x + 2$, resulta que P(1) = -1.

4.- Las raíces de un polinomio son los valores de x que cumplen que P(x) =0 y, por el punto anterior, son los valores "a" que al dividir P(x) / x-a nos da un resultado exacto (resto = 0). Por lo tanto, hallar las raíces del polinomio consiste en ir probando a ver qué valores de a dan resto 0 al dividir.

5.- Por la forma en que se "construye" la división por el método de Ruffini, para hallar las raíces del polinomio iremos "probando" posibles valores de "a", pero sólo probaremos aquellos valores que sean divisores de a_0 (el término independiente). Así, por ejemplo, para calcular las raíces de $x^3 + x^2 - 4x - 4$, lo que hacemos es probar con 1, -1, 2 , -2, 4 y -4 (es decir, nos saltamos el 3, ya que no es divisor de 4). Si ninguna es raíz, es que no tiene raíces enteras. Veamos:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 1 & & 1 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & -2 & \boxed{-6} \end{array}$$

No da exacto. Probamos con -1

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ -1 & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

Sí que da exacto, por lo tanto -1 es raíz del polinomio y (x + 1) es divisor del polinomio (daos cuenta de que a es -1 y por lo tanto x – a es x + 1. ¿OK?.

Generalmente, cuando llegamos a que el resultado es un polinomio de grado 2 (como ahora), ya no hace falta seguir aplicando Ruffini. Utilizamos la fórmula de Cardano y listo. En este caso no hace falta ni eso porque lo que nos queda como cociente es $x^2 - 4$ que es "diferencia de cuadrados y que es igual a "suma por diferencia", es decir (x-2)·(x+2) (Recordad los "productos notables").

Así pues, las raíces del polinomio son -1, -2 y 2 y el polinomio $x^3 + x^2 - 4x - 4$ se puede expresar como:

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$$

Ya está factorizado.

Por último, pero MUY, MUY importante.

Los polinomios $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ y $Q(x) = 2x^3 + 2x^2 - 8x - 8$ tienen las mismas raíces, pero NO son iguales (de hecho Q(x) es el doble que P(x)). Por lo tanto, al hacer la factorización SIEMPRE hay que poner delante del todo el coeficiente de la x de mayor grado. Por lo tanto, las factorizaciones de P(x) y de Q(x) son:

$$P(x) = (x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$$

$$Q(x) = \mathbf{2}\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$$

Haced la prueba y veréis que es así. Si no ponéis el dos, la cagáis!!!!