Hola:

Vamos a ver dos maneras de discutir el rango de una matriz, por determinantes de menores o por el método de Gauss. A mí, personalmente, me gusta hacer las discusiones siempre por el método de Gauss, pero eso ya depende de cada uno…

DETERMINANTES DE MENORES

La matriz del problema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -k-1 & k+4 \\ k & 1 & 2k+2 & k+1 \\ k+1 & k+4 & 3 & 3k+6 \end{pmatrix}$$

El rango de esta matriz sólo puede ser 1, 2 ó 3. Para que sea 3, basta que uno de los 4 determinantes de orden 3 sea distinto de cero. Vamos a ver los 4 determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -k-1 \\ k & 1 & 2k+2 \\ k+1 & k+4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2k+2 \\ k+4 & 3 \end{vmatrix} - k \cdot \begin{vmatrix} 2 & -k-1 \\ k+4 & 3 \end{vmatrix} + (k+1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -k-1 \\ 1 & 2k+2 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot [1 \cdot 3 - (2k+2) \cdot (k+4)] - k \cdot [2 \cdot 3 - (k+4) \cdot (-k-1)] + (k+1) \cdot [2 \cdot (2k+2) - 1 \cdot (-k-1)] =$$

$$[3 - (2k^2 + 8k + 2k + 8)] - k \cdot [6 - (-k^2 - k - 4k - 4)] + (k+1) \cdot [4k + 4 - (-k-1)] = [-2k^2 - 10k - 5] - [k^3 + 5k^2 + 10k] + [5k^2 + 10k + 5] =$$

$$-k^3 - 2k^2 - 10k$$

Si lo igualas a cero, tiene como soluciones:

$$k = 0 \; y \; k = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-10)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40}}{-2} \;, que\ no\ tiene\ solución$$

Por lo tanto, el primer menor de orden 3, sólo se anula si k=0.

Veamos el segundo (ahora ya con menos detalle):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k+4 \\ k & 1 & k+1 \\ k+1 & k+4 & 3k+6 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & k+1 \\ k+4 & 3k+6 \end{vmatrix} - k \cdot \begin{vmatrix} 2 & k+4 \\ k+4 & 3k+6 \end{vmatrix} + (k+1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & k+4 \\ 1 & k+1 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot [3k + 6 - k^2 - 5k - 4] - k \cdot [6k + 12 - k^2 - 8k - 16] + (k+1) \cdot [2k + 2 - k - 4] = -k^2 - 2k + 2 + k^3 + 2k^2 + 4k + k^2 - k - 2 =$$

$$k^3 + k^2 + k$$

Si lo igualas a cero, tiene como soluciones:

$$k = 0 \; y \; k = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \text{, que tampoco tiene solución}$$

Así pues, el segundo menor de orden 3, sólo se anula si k=0.

Vamos a por el tercero:

$$\begin{vmatrix} 1 & -k-1 & k+4 \\ k & 2k+2 & k+1 \\ k+1 & 3 & 3k+6 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 2k+2 & k+1 \\ 3 & 3k+6 \end{vmatrix} - k \cdot \begin{vmatrix} -k-1 & k+4 \\ 3 & 3k+6 \end{vmatrix} + (k+1) \cdot \begin{vmatrix} -k-1 & k+4 \\ 2k+2 & k+1 \end{vmatrix} =$$

$$[6k^2 + 18k + 12 - 3k - 3] - k \cdot [-3k^2 - 9k - 6 - 3k - 12] + (k+1) \cdot [-k^2 - 2k - 1 - 2k^2 - 6k - 8] =$$

$$6k^2 + 15k + 9 + 3k^3 + 12k^2 + 18k - 3k^3 - 8k^2 - 9k - 3k^2 - 8k - 9 =$$

$$10k^2 + 16k$$

Si igualas a cero, tiene como soluciones:

$$k = 0 \; y \; k = -\frac{8}{5}$$

Por lo tanto, el tercer menor de orden 3 tiene dos valores que lo anulan.

Miremos el último:

$$\begin{vmatrix} 2 & -k-1 & k+4 \\ 1 & 2k+2 & k+1 \\ k+4 & 3 & 3k+6 \end{vmatrix} =$$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 2k+2 & k+1 \\ 3 & 3k+6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -k-1 & k+4 \\ 3 & 3k+6 \end{vmatrix} + (k+4) \cdot \begin{vmatrix} -k-1 & k+4 \\ 2k+2 & k+1 \end{vmatrix} =$$

$$2 \cdot [6k^2 + 18k + 12 - 3k - 3] - 1 \cdot [-3k^2 - 9k - 6 - 3k - 12] + (k+4) \cdot [-k^2 - 2k - 1 - 2k^2 - 10k - 8] =$$

$$12k^2 + 30k + 18 + 3k^2 + 12k + 18 - 3k^3 - 12k^2 - 9k - 12k^2 - 48k - 36 = -3k^3 - 9k^2 - 15k$$

Que igualando a cero y resolviendo, tiene como soluciones:

$$k = 0 \; y \; k = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-15)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 180}}{-6} \text{, que no tiene solución}$$

Por lo tanto, el cuarto menor de orden 3, sólo se anula cuando k=0.

Así que ya vemos que si k=0, los cuatro menores de orden 3 se anulan, por lo que entonces el rango sería menor que 3 (luego lo analizamos). Sin embargo, si k≠0, entonces el rango es 3.

Por lo tanto, ahora ya sólo nos queda analizar el caso k=0. En ese caso, la matriz nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

De esta matriz NO HACE FALTA que miremos menores de 3x3, ya que ya sabemos que los 4 nos darán 0 (es lo que hemos visto en las dos hojas anteriores). Por lo tanto, lo que necesitamos es saber si el rango de esta matriz es 1 ó 2. Pero en seguida encontramos un menor de orden 2 con determinante distinto de 0. Cogemos el de arriba a la izquierda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Por lo tanto, cuando k=0, el rango es 2.

MÉTODO DE GAUSS

Partimos de la misma matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -k-1 & k+4 \\ k & 1 & 2k+2 & k+1 \\ k+1 & k+4 & 3 & 3k+6 \end{pmatrix}$$

Hacemos las siguientes operaciones de filas:

- F2' = F2 – k· F1
- F3' = F3 – (k+1)·F1

Veamos la primera operación:

$$\begin{array}{ccccc} F2 & k & 1 & 2k+2 & k+1 \\ k\cdot F1 & k & 2k & -k^2-k & k^2+4k \\ F2' & 0 & 1-2k & k^2+3k+2 & -k^2-3k+1 \end{array}$$

La segunda operación sería:

$$\begin{array}{ccccc} F3 & k+1 & k+4 & 3 & 3k+6 \\ (k+1)\cdot F1 & k+1 & 2k+2 & -k^2-2k-1 & k^2+5k+4 \\ F3' & 0 & -k+2 & k^2+2k+4 & -k^2-2k+2 \end{array}$$

Por lo que nuestra matriz original se transforma en:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -k-1 & k+4 \\ 0 & 1-2k & k^2+3k+2 & -k^2-3k+1 \\ 0 & -k+2 & k^2+2k+4 & -k^2-2k+2 \end{pmatrix}$$

Ahora viene lo más complejo de este método, que es conseguir el 0 debajo del 1-2k. Primero porque la combinación de filas no es tan evidente y, segundo, porque el cálculo es un poco más farragoso que hasta ahora.

Para conseguir el cero que buscamos, sustituiremos la tercera por una combinación de la segunda y la tercera, pero esta vez la combinación no es tan sencilla. Lo que hacemos es multiplicar la segunda por (-k+2) y la tercera por (1-2k). Es decir, multiplicamos cada fila por el primer coeficiente de la otra. Luego restamos y … voilà, se nos va el primer término (bueno, el segundo, que no contaba los ceros…). Veámoslo:

La operación es:

- F3' = (1-2k)·F3 – (-k+2)·F2

Y se realiza como sigue:

$$\begin{array}{ccccc} (1-2k)\cdot F3 & 0 & (1-2k)\cdot(-k+2) & (1-2k)\cdot(k^2+2k+4) & (1-2k)\cdot(-k^2-2k+2) \\ (-k+2)\cdot F2 & 0 & (-k+2)\cdot(1-2k) & (-k+2)\cdot(k^2+3k+2) & (-k+2)\cdot(-k^2-3k+1) \end{array}$$

Aquí, lo más peñazo es realizar las cuatro multiplicaciones, pero tampoco es tan complicado…:

$$\begin{array}{ccccc} (1-2k)\cdot F3 & 0 & (1-2k)\cdot(-k+2) & k^2+2k+4-2k^3-4k^2-8k & -k^2-2k+2+2k^3+4k^2-4k \\ (-k+2)\cdot F2 & 0 & (-k+2)\cdot(1-2k) & -k^3-3k^2-2k+2k^2+6k+4 & k^3+3k^2-k-2k^2-6k+2 \end{array}$$

Que, si lo agrupamos nos queda:

$$\begin{array}{ccccc} (1-2k)\cdot F3 & 0 & (1-2k)\cdot(-k+2) & -2k^3-3k^2-6k+4 & 2k^3+3k^2-6k+2 \\ (-k+2)\cdot F2 & 0 & (-k+2)\cdot(1-2k) & -k^3-k^2+4k+4 & k^3+k^2-7k+2 \end{array}$$

Y si hacemos la resta, tenemos:

$$\begin{array}{ccccc} (1-2k)\cdot F3 & 0 & (1-2k)\cdot(-k+2) & -2k^3-3k^2-6k+4 & 2k^3+3k^2-6k+2 \\ (-k+2)\cdot F2 & 0 & (-k+2)\cdot(1-2k) & -k^3-k^2+4k+4 & k^3+k^2-7k+2 \\ F3' & 0 & 0 & -k^3-2k^2-10k & k^3+2k^2+k \end{array}$$

Por lo tanto, nuestra matriz original se convierte en:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -k-1 & k+4 \\ 0 & 1-2k & k^2+3k+2 & -k^2-3k+1 \\ 0 & 0 & -k^3-2k^2-10k & k^3+2k^2+k \end{pmatrix}$$

Si los elementos marcados en amarillo son diferentes de 0, tendré mi matriz triangular y el rango será 3. Por lo tanto, vamos a mirar qué valores de k anulan esos elementos:

$$1-2k=0 \quad \Rightarrow \quad k={}^{1}/_{2}$$

$$-k^3-2k^2-10k=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k^2+2k+10=0 \quad \Rightarrow \quad k=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot10}}{2\cdot1}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-40}}{2}, que\ no\ tiene\ solución \end{cases}$$

Por lo tanto, los valores "conflictivos" son k=0 y k=1/2. Vamos a ver qué pasa con cada uno de ellos.

Para k=0 tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Que es una matriz de rango 2.

Por otro lado, para k=1/2 tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -{}^{3}/_{2} & {}^{9}/_{2} \\ 0 & 0 & {}^{15}/_{4} & -{}^{3}/_{4} \\ 0 & 0 & -{}^{45}/_{8} & {}^{13}/_{8} \end{pmatrix}$$

Aquí es fácil encontrar una submatriz de rango 3. Si tomamos la primera, la tercera y la cuarta columna y calculamos su determinante tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & -{}^{3}/_{2} & {}^{9}/_{2} \\ 0 & {}^{15}/_{4} & -{}^{3}/_{4} \\ 0 & -{}^{45}/_{8} & {}^{13}/_{8} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^{15}/_{4} & -{}^{3}/_{4} \\ -{}^{45}/_{8} & {}^{13}/_{8} \end{vmatrix} = \frac{15}{4} \cdot \frac{13}{8} - \frac{-45}{8} \cdot \frac{-3}{4} = \frac{195 - 135}{32} = \frac{60}{32} = \frac{15}{8}$$

Por lo tanto, si k=1/2, el rango también es 3, Así pues, como resumen tenemos que para k=0 el rango es 2, para cualquier otro valor de k, el rango es 3.

Como ves, coinciden los resultados por los dos métodos.

Un saludo

Josss