MÉTODOS CLÁSICOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Antes de que se empleara el cálculo matricial y el paso siguiente que es el cálculo con ordenador, había tres métodos clásicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales (sobre todo de tamaño pequeño). Son los conocidos métodos de sustitución, igualación y reducción. Vamos a repasarlos.

Método de sustitución.

Consiste en usar una de las ecuaciones para despejar una de las incógnitas (en función de las otras) y sustituirla en las ecuaciones que nos quedan. Conseguimos un sistema equivalente con una incógnita y una ecuación menos. Por ejemplo:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

Despejamos en la primera ecuación y obtenemos:

$$x = 3 - 2y \qquad (1)$$

Y ahora sustituimos este resultado en la segunda y tenemos:

$$3 \cdot (3 - 2y) - 2y = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 9 - 6y - 2y = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 8 = 8y \qquad \Rightarrow \qquad y = 1$$

Ahora que ya hemos obtenido el valor de y, sustituimos en (1) y tenemos que:

$$x = 3 - 2 \cdot 1 \;\; 3 - 2 = 1$$

Por lo tanto, la solución a nuestro sistema es:

$$x = 1 \quad y = 1$$

Este método es muy adecuado cuando en una de las ecuaciones tenemos una incógnita con coeficiente 1. También es el que suelo utilizar cuando no se cumplen las "condiciones idóneas" de ninguno de los otros. Por así decirlo, es el que considero más universal….

Método de igualación:

Este método consiste en despejar un mismo valor en las dos ecuaciones e igualarlas entre sí. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Aquí no tenemos ningún término con coeficiente 1, por lo tanto, si empezamos a despejar nos aparecerán coeficientes fraccionarios. En este caso vale la pena darse cuenta de que la y aparece siempre con un coeficiente de 2. Por lo tanto, despejando en ambas ecuaciones tenemos:

$$\begin{cases} 2y = 7 - 3x \\ 2y = 2 + 2x \end{cases}$$

Ahora aplicamos aquello de "dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí" y podemos escribir que:

$$7-3x=2+2x \qquad \Rightarrow \qquad 7-2=2x+3x \qquad \Rightarrow \qquad 5=5x \qquad \Rightarrow \qquad x=1$$

Ahora, sustituimos este valor en cualquiera de las ecuaciones (las dos originales o las dos que hemos encontrado después) y tenemos que:

$$3\cdot 1+2y=7 \qquad \Rightarrow \qquad 2y=7-3 \qquad \Rightarrow \qquad 2y=4 \qquad \Rightarrow \qquad y=2$$

Por lo tanto, la solución a nuestro sistema es:

$$x=1 \quad y=2$$

Evidentemente, este método es muy adecuado cuando en nuestras ecuaciones tenemos una incógnita que aparece con el mismo coeficiente en ambas ecuaciones.

Método de reducción.

El método consiste en sustituir nuestro sistema de dos ecuaciones por una única ecuación suma de las dos anteriores de manera que, al sumar, nos desaparezca una incógnita. Por ejemplo:

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x-2y=2 \end{cases}$$

Si ahora sumamos ambas ecuaciones tenemos que:

$$x+2y+2x-2y=4+2 \qquad \Rightarrow \qquad 3x=6 \qquad \Rightarrow \qquad x=2$$

Ahora sólo nos queda sustituir en cualquiera de las dos ecuaciones originales y tenemos:

$$2+2y=4 \qquad \Rightarrow \qquad 2y=2 \qquad \Rightarrow \qquad y=1$$

Por lo tanto, la solución a nuestro sistema es:

$$x=2 \quad y=1$$

Y también es evidente que este método es muy adecuado cuando tenemos una incógnita que lleva el mismo coeficiente pero cambiado de signo en ambas ecuaciones.

Combinación de métodos.

Evidentemente, estos métodos se pueden combinar en sistemas de mayor entidad, aunque siempre hay que ir con un poco de cuidado. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+2y+2z=5 \\ -3x-y+3z=-1 \end{cases}$$

Despejamos z en la primera ecuación:

$$z = 3y - 2x \qquad (1)$$

Ahora sustituimos en las otras dos ecuaciones y nos queda:

$$\left.\begin{cases} x + 2y + 2 \cdot (3y - 2x) = 0 & \Rightarrow \quad -3x + 8y = 5 \\ -3x - y + 3 \cdot (3y - 2x) = -1 & \Rightarrow \quad -9x + 8y = -1 \end{cases}\right\} \qquad (2)$$

Ahora este último sistema equivalente lo podemos resolver por igualación, aprovechando que tenemos 8y en ambas ecuaciones, pero aprovecho para mostraros otra forma de utilizar la reducción. En vez de sumar las dos ecuaciones (que nos daría 16y)lo que hacemos es RESTARLAS (es igual de lícito y nos quitamos las y de un plumazo).

$$-3x + 8y - (-9x) - 8y = 5 - (-1) \quad \Rightarrow \quad 6x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Ahora, para hallar la y, sustituyo en cualquiera de las ecuaciones de (2)…

$$-3 \cdot 1 + 8y = 5 \quad \Rightarrow \quad 8y = 8 \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

Y ahora sustituyo x e y en (1) para encontrar z:

$$z = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 3 - 2 = 1$$

Por lo tanto, mi inocente sistema tiene por solución:

$$x = 1 \quad y = 1 \quad z = 1$$

Ya está.