A pesar de que soy un gran defensor del método de Gauss, tengo que reconocer que a veces se complica. Las operaciones para “meter ceros” no son siempre demasiado evidentes, lo que puede llevar a decantarse por otros métodos (no es mi caso, yo siempre prefiero Gauss….). Hoy daremos una vuelta de tuerca más a este método con un problema de una de las PACs de la UOC. Se trata de discutir, en función del parámetro k, el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & k+2 & -k \\ k-2 & 2 & -3-k & 2k \\ k & 0 & -5-2k & 2k+2 \end{pmatrix}$$

Pues bien, todo empieza como siempre, intentando “meter ceros” debajo del 2. Como que las operaciones pueden ser complicadas, las haré una por una. En primer lugar haremos la siguiente transformación:

$$F'_2 = 2 \cdot F_2 - (k-2) \cdot F_1$$

¿Veis el truco? Esto es lo importante de este pdf!!!!. Como no tenemos un uno que nos simplifique la operación, lo que hacemos es multiplicar cada fila por el primer número “de la otra”. Así multiplicamos la segunda fila por 2 (primer elemento de la primera fila) y la primera fila por (k-2) (que es el primer elemento de la segunda fila). ¿De acuerdo?. Entonces tenemos:

$2 \cdot F_2$	2k-4	4	-6-2k	4k
$(k-2) \cdot F_1$	2k-4	-2k+4	k^2 - 4	$-k^2 + 2k$
F'_2 = Resta	/	2k	$-k^2 - 2k - 2$	$k^2 + 2k$

Así ya hemos conseguido el primer cero. Ahora hacemos algo parecido para la tercera fila, haciendo:

$$F'_3 = 2 \cdot F_3 - k \cdot F_1$$

Y esto se traduce en:

$2 \cdot F_3$	2k	0	-10-4k	4k + 4
$k \cdot F_1$	2k	-2k	$k^2 + 2k$	$-k^2$
F'_3 = Resta	/	2k	$-k^2 - 6k - 10$	$k^2 + 4k + 4$

Con lo que nuestra matriz se transforma en:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & k+2 & -k \\ 0 & 2k & -k^2 - 2k - 2 & k^2 + 2k \\ 0 & 2k & -k^2 - 6k - 10 & k^2 + 4k + 4 \end{pmatrix}$$

Pero ahora lo tenemos realmente fácil. Bastará con hacer la sustitución:

$$F''_3 = F'_3 - F'_2$$

Que haciéndolo como antes, nos queda:

F'_3	/	2k	$-k^2 - 2k - 2$	$k^2 + 2k$
F'_2	/	2k	$-k^2 - 6k - 10$	$k^2 + 4k + 4$
F''_3 = Resta	/	/	4k +8	-2k - 4

Con lo que la matriz queda:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & k+2 & -k \\ 0 & 2k & -k^2-2k-2 & k^2 + 2k \\ 0 & 0 & 4k+8 & -2k-4 \end{pmatrix}$$

Y ahora ya podemos discutir el rango de la matriz.

Si miramos el caso 4k + 8 = 0, tenemos:

$$4\,k + 8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k = -2$$

Entonces, la matriz se nos transforma en:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y vemos claramente que la matriz tiene rango 2.

El otro valor conflictivo es el que anula 2k, que tenemos:

$$2k = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k = 0$$

Y la matriz queda:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Que “parece” (con tantos ceros en la parte izquierda de la matriz) que sea de rango 2, pero si cogemos las tres últimas columnas y calculamos el determinante desarrollando por la primera columna tenemos que:

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-8) = 16$$

Por lo que el rango es 3.

Así que ya sabemos cómo se comporta la matriz.

$$rango\ de\ A = \begin{cases} Si\ k = -2, el\ rango\ es\ 2 \\ Para\ todos\ los\ demás\ valores\ (incluido\ el\ cero)\ el\ rango\ es\ 3 \end{cases}$$