INDETERMINACIONES

Hay siete tipos distintos de indeterminaciones cuando calculamos límites y las debemos conocer y aprender a solucionar. De algunas hay métodos directos para solucionarlas, mientras que otras recurren al tan famoso método de los matemáticos de “reducirlo al caso anterior” y solucionarlo así. Por suerte, aparte de los métodos más o menos directos, existe la regla de L’Hopital que es como una especie de varita mágica que soluciona lo que no es evidente. Las siete indeterminaciones son:

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 0\cdot\infty, \qquad \infty-\infty, \qquad \infty^0, \qquad 0^0, \qquad 1^\infty$$

Son indeterminaciones porque, si miramos la expresión “por un lado” o “por el otro”, nos dan resultados distintos. Por ejemplo, la primera indeterminación, si la miro “por arriba”, 0 dividido por cualquier cosa es siempre 0, pero si la miro “por abajo”, cualquier cosa dividida por 0 es ∞. Por lo tanto, no nos ponemos de acuerdo, es una indeterminación. Por ejemplo, la quinta indeterminación, si la miro “por la base”, ∞ elevado a cualquier cosa es ∞, pero si la miro “por el exponente”, cualquier cosa elevada a 0 es 1. Por lo tanto, no nos ponemos de acuerdo, es una indeterminación. Hay una expresión que parece una indeterminación, pero que no lo es. La veremos al final. Ahora veamos cada indeterminación por separado.

Caso 0/0

Vamos a distinguir dos casos. Supongamos que estamos calculando un límite que nos da 0/0 y que, tanto la expresión del numerador como la del denominador son un polinomio. Es decir, tenemos algo parecido a:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-x^2-5x-3}{x^3-4x^2-3x+18} = \frac{27-9-15-3}{27-36-9+18} = \frac{0}{0}$$

Si os fijáis bien, resulta que x=3 es una raíz tanto del polinomio del numerador como del polinomio del denominador (una raíz es el valor que hace cero el polinomio). Por lo tanto, eso quiere decir que, tanto el polinomio del numerador como el del denominador los podemos descomponer en (x – 3)·“otro polinomio”. Lo único que hemos de hacer es aplicar Ruffini a los dos polinomios y tenemos que:

$$x^3-x^2-5x-3 = (x-3)\cdot(x^2+2x+1) \quad y$$

$$x^3-4x^2-3x+18 = (x-3)\cdot(x^2-6x+9)$$

Por lo tanto, nuestro límite queda:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-x^2-5x-3}{x^3-4x^2-3x+18} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot(x^2+2x+1)}{(x-3)\cdot(x^2-x-6)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x^2+2x+1)}{(x^2-x-6)} = \frac{16}{0} = \infty$$

El segundo caso (que se puede aplicar también a esta primera versión) es que tengamos un cociente de “funciones extrañas” y que se anulen el numerador y el denominador. Entonces, lo más cómodo es ir directamente a la regla de L’Hopital y a tomar viento. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{sen\,x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

En este caso, aplicamos la regla de L'Hopìtal, que consiste en derivar POR SEPARADO el numerador y el denominador (NUNCA haciendo la derivada del cociente EHHHHH?). En este caso tenemos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{sen\,x} = \lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{\cos x} = \frac{-e^0}{1} = \frac{-1}{1} = -1$$

Si la aplicáramos al primer caso tendríamos:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-x^2-5x-3}{x^3-4x^2-3x+18} = \lim_{x\to 3}\frac{3x^2-2x-5}{3x^2-8x-3} = \frac{27-6-5}{27-24-3} = \frac{16}{0} = \infty$$

Y como veis, cuadra con lo anterior. Así que, como queráis. Podéis aplicar L'Hopital desde el principio o podéis "haceros-los-interesantes-que-dominan-el-tema-polinomios" y aplicar el primer método….

Caso ∞/∞

Aquí también hay dos métodos. Uno más directo y el otro, nuestra bien amada regla de L'Hopital. El primer método consiste en "comprobar-qué-infinito-es-más-grande". ¿Comoooooorrrrrr? Pues sí. Hay infinitos más grandes que otros y eso nos sirve para comparar. Simplificando mucho, quedémonos con que:

1. Las más grandes son las exponenciales.
2. Luego van las polinómicas.
3. Las piltrafillas son los logaritmos.

Para acabar de cerrar el tema, cuando comparamos exponenciales, a mayor base, mayor infinito. Cuando comparamos polinomios, a mayor exponente, mayor infinito. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^{45})}{x^3}$$

Al comparar infinitos tenemos arriba un logaritmo y abajo un polinomio, por lo tanto gana el de abajo, es como si tuviéramos 1/∞, por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^{45})}{x^3} = 0$$

Por ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^7-3x^4+3}}{x^3}$$

Al comparar infinitos, arriba tengo un exponente máximo de 7/2, y debajo de 3. Como 7/2 > 3, gana el de arriba, por lo tanto es como si tuviera ∞/1, por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^7 - 3x^4 + 3}}{x^3} = \infty$$

Aquí hago una pequeña anotación MUY IMPORTANTE. Si tengo un cociente de polinomios y los dos tienen el mismo exponente, entonces el resultado es el cociente de los **coeficientes** de mayor grado. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^6 - 3x^4 + 3}}{3x^3} = \frac{\sqrt{4}}{3} = \frac{2}{3}$$

Pasemos ahora al método L'Hopital. Supongamos que tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(\ln x)^2 + 4x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Pasamos a derivar INDEPENDIENTEMENTE arriba y abajo, y tenemos que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(\ln x)^2 + 4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\cdot\ln x \cdot \frac{1}{x} + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2\cdot\ln x}{x} + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2\cdot\ln x + 4x}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2\cdot\ln x + 4x} = \frac{\infty}{\infty}$$

¡¡¡¡Pues vaya!!!!! No parece que hayamos avanzado mucho ¿verdad?. Pero sí. Ahora hemos de volver a aplicar L'Hopital y ya triunfamos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(\ln x)^2 + 4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2\cdot\ln x + 4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\cdot\frac{1}{x} + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2}{x} + 4} = \frac{1}{\frac{2}{\infty} + 4} = \frac{1}{0+4} = \frac{1}{4}$$

<u>Caso 0 · ∞</u>

Este es uno de aquellos casos que "se reduce al caso anterior" y tan anchos. Lo que haremos será convertir un problema del tipo:

$$f(x)\cdot g(x) = f(x)\cdot \frac{1}{1/g(x)} = \frac{f(x)}{1/g(x)}$$

Así, si f(x) tiende a cero y g(x) tiende a ∞, habremos convertido 0· ∞ en:

$$f(x)\cdot g(x) = 0\cdot\infty = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{0}{1/\infty} = \frac{0}{0}$$

También podríamos hacerlo al revés (todo depende de lo que nos sea más cómodo):

$$f(x)\cdot g(x) = 0\cdot\infty = \frac{g(x)}{1/f(x)} = \frac{\infty}{1/0} = \frac{\infty}{\infty}$$

¡¡Que no cunda el pánico!! Parece muy liado, pero es bastante sencillo. Veamos un ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot(e^{1/x} - 1) = \infty\cdot\left(e^{1/\infty} - 1\right) = \infty\cdot(e^0 - 1) = \infty\cdot(1-1) = \infty\cdot 0$$

Ahora hemos de “convertir” una de nuestras dos funciones en 1/algo. En este caso, lo mejor es coger la x y juguetear con ella. Así tendremos que:

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot(e^{1/x}-1) = \lim_{x\to\infty}\frac{(e^{1/x}-1)}{1/x} = \frac{1-1}{1/\infty} = \frac{0}{0}$$

Ya lo tenemos como queríamos. Ahora, aplicamos L’Hopital y resolvemos:

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot(e^{1/x}-1) = \lim_{x\to\infty}\frac{(e^{1/x}-1)}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}\ .\ -1/x^2}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}}{1} = e^0 = 1$$

Caso ∞ - ∞

Aquí nos pasará lo mismo. Casi siempre, mediante algún cambio más o menos “perro”, la acabaremos convirtiendo en una indeterminación de los dos primeros casos…

Por ejemplo:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{\ln 1}-\frac{1}{0}\right) = \infty-\infty$$

En este caso es muy sencillo. Reducimos a común denominador y nos queda:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+x)}\right) = \frac{0-0}{0\cdot0} = \frac{0}{0}$$

Ahora aplicamos la regla de L’Hopital y…

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+x)}\right) = \lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{1\cdot\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}} =$$

Ahora reducimos a común denominador arriba y abajo (curiosamente, nos queda el mismo denominador en los dos casos) y…

$$= \lim_{x\to0}\frac{\frac{1+x-1}{1+x}}{\frac{(1+x)\cdot\ln(1+x)+x}{1+x}} = \lim_{x\to0}\frac{x}{(1+x)\cdot\ln(1+x)+x} = \frac{0}{1\cdot0+0} = \frac{0}{0}$$

Como antes…., hay que volver a aplicar la regla de L’Hopital y…

$$= \lim_{x\to0}\frac{1}{1\cdot\ln(1+x)+(1+x)\cdot{}^{1}/_{(1+x)}+1} = \lim_{x\to0}\frac{1}{\ln(1+x)+1+1} = \frac{1}{0+1+1} = \frac{1}{2}$$

Otro caso MUUUUUYYYYYY típico, es cuando tenemos resta de raíces cuadradas. Allí el truco consiste en “multiplicar y dividir por el conjugado”. Pongo un ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-3}) = \infty-\infty$$

Ahora multiplicamos y dividimos por el conjugado de la expresión que tenemos y nos queda:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)\cdot\left(x+\sqrt{x^2-3}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-3}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2-3)}{\left(x+\sqrt{x^2-3}\right)}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3}{\left(x+\sqrt{x^2-3}\right)} = \frac{3}{\infty} = 0$$

Ya veis que, cada vez que llegamos a una indeterminación del tipo 0/0 ó ∞/∞ podemos dar el caso por “quasi-solucionado”, porque a partir de aquí, con L’Hopital ya funcionamos. Vamos a ver las tres que faltan, que son las del tipo algo elevado a algo y que, para transformarlas en un formato conocido, se resuelven las tres igual.

Caso 1^{∞}, ∞^0 y 0^0

Para resolver estas indeterminaciones, el truco que me gusta aplicar es el siguiente:

Supongamos que el límite que estamos calculando vale A. Lo que pasa es que no sabemos cuanto es ese A porque cuando empezamos a resolver nos queda una indeterminación (por ejemplo la primera 1 elevado a ∞).

$$A = 1^{\infty}$$

Ahora podemos tomar logaritmos a ambos lados y tenemos:

$$\ln A = \ln(1^{\infty}) = \infty \cdot \ln 1 = \infty \cdot 0$$

Y este ya es un caso que sabemos resolver….Pasa lo mismo con las otras dos:

$$B = \infty^0 \quad \Rightarrow \quad \ln B = \ln(\infty^0) = 0 \cdot \ln\infty = 0 \cdot \infty$$

$$C = 0^0 \quad \Rightarrow \quad \ln C = \ln(0^0) = 0 \cdot \ln 0 = 0 \cdot (-\infty)$$

Luego, sólo nos queda “deshacer el camino andado” y ya tenemos el límite. Veamos un ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{x-2} = 1^{\infty}$$

Para llegar a este resultado hemos aplicado que en el cociente, los dos polinomios son del mismo grado y hemos hecho “cociente de coeficientes” (es decir, 1/1). Bien, ya estamos de lleno en una de nuestras indeterminaciones. Lo primero es transformarla en una del tipo 0 · ∞ con el truco que os he descrito.

$$A = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{x-2} \quad \Rightarrow \quad \ln A = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{x-2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{x-2}\right)\right]$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left[(x-2)\cdot\ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)\right] = \infty \cdot \ln 1 = \infty \cdot 0$$

Ahora, para continuar, hacemos lo que hemos aprendido al resolver este tipo de indeterminaciones, es decir, transformarla en 0/0 ó ∞/∞. Por lo tanto tendremos que…

$$\ln A = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)}{1/(x-2)} = \frac{\ln 1}{1/\infty} = \frac{0}{0}$$

Y ahora ya sí, podemos aplicar la regla de L'Hopital (¡¡bendita regla!!).

$$\ln A = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)}{1/(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\frac{x+3}{x+2}} \cdot \frac{1\cdot(x+2)-(x+3)\cdot 1}{(x+2)^2}}{-1/(x-2)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x+2}{x+3} \cdot \frac{-1}{(x+2)^2}}{-1/(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{(x+3)\cdot(x+2)}}{\frac{-1}{(x-2)^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-2)^2}{(x+3)\cdot(x+2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^2+5x+6} = 1$$

Pues ya casi está. Ahora "deshacemos el camino" y tenemos que:

$$\ln A = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{\ln A} = e^1 \quad \Rightarrow \quad A = e$$

Y ese es nuestro resultado.

Ahora ya sólo nos queda analizar la "indeterminación tramposa", porque parece una indeterminación, pero no lo es. Se trata de cero elevado a infinito. Si miras la base, parece que cero por cualquier cosa será cero, pero si lo miras por el exponente, cualquier cosa elevada a infinito dará infinito. PERO NO. Aquí os he pillado porque lo que debería decir es "cualquier cosa MAYOR QUE UNO elevada a infinito da infinito". Además, si tenemos un límite con ese resultado y aplicamos el truco que os acabo de enseñar tenemos:

$$A = 0^\infty \quad \Rightarrow \quad \ln A = \ln(0^\infty) = \infty \cdot \ln 0 = \infty \cdot (-\infty) = -\infty \quad \Rightarrow \quad A = e^{-\infty} = 0$$

Resulta que NO es una indeterminación.

Y con esto…tema cerrado. Hay otras formas de resolver estos límites exponenciales, pero creo que esta es la manera más sencilla (y más general) de lidiar con ellas.

Yatá.