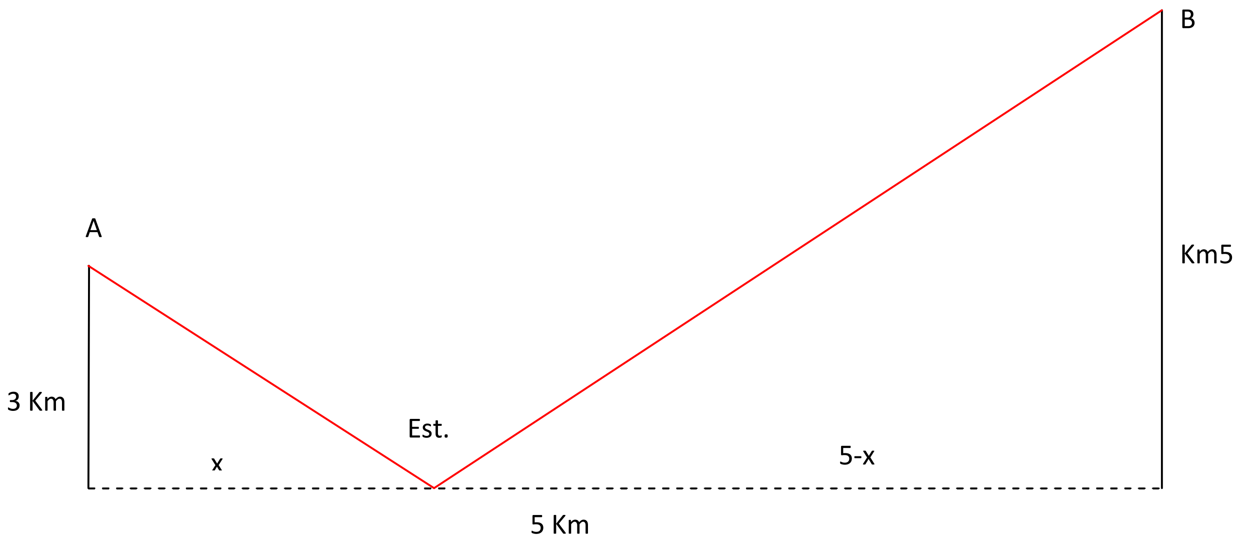
Para resolver el problema de la estación de tren, se puede utilizar el método tradicional de optimización, lo que pasa es que la ecuación que te queda para resolverlo es una pasada.



Ahora, hay que plantear las ecuaciones. ¿Cuál es la distancia A-B? Pues será la suma de A-Est + Est-B, y ambas se obtienen por el teorema de Pitágoras, es decir:

$$d(x) = \sqrt{x^2+3^2} + \sqrt{(5-x)^2+5^2} = \sqrt{x^2+9} + \sqrt{x^2-10x+50}$$

Y esta es la función que hay que derivar e igualar a cero.

$$0 = \frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+9}} + \frac{2x-10}{2\cdot\sqrt{x^2-10x+50}} = \frac{2x\cdot\sqrt{x^2-10x+50}+(2x-10)\cdot\sqrt{x^2+9}}{2\cdot\sqrt{x^2+9}\cdot\sqrt{x^2-10x+50}}$$

Que es lo mismo que:

$$0 = 2x\cdot\sqrt{x^2-10x+50} + (2x-10)\cdot\sqrt{x^2+9}$$

$$2x\cdot\sqrt{x^2-10x+50} = (10-2x)\cdot\sqrt{x^2+9}$$

Elevando al cuadrado tenemos:

$$4x^2\cdot(x^2-10x+50) = (100-40x+4x^2)\cdot(x^2+9)$$

$$4x^4-40x^3+200x^2 = 100x^2+900-40x^3-360x+4x^4+36x^2$$

$$64x^2+360x-900=0 \quad\Rightarrow\quad 16x^2+90x-225=0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado y nos queda:

$$x = \frac{-90\pm\sqrt{90^2+4\cdot16\cdot225}}{2\cdot16} = \frac{-90\pm\sqrt{22500}}{32} = \frac{-90\pm150}{32} = \begin{cases} \dfrac{60}{32} = 1{,}875 \\ \dfrac{-240}{32} = -7{,}5 \end{cases}$$

Como que, de momento, la ciencia no ha sido capaz de construir distancia negativas, nos quedamos con la primera solución. Por lo tanto, los dos segmentos valen 1,875 y 5-1,875 = 3,125 y las distancias son:

$$A - Est = \sqrt{1{,}875^2 + 9} = 3{,}5377$$
$$Est - B = \sqrt{3{,}125^2 + 25} = 5{,}8962$$

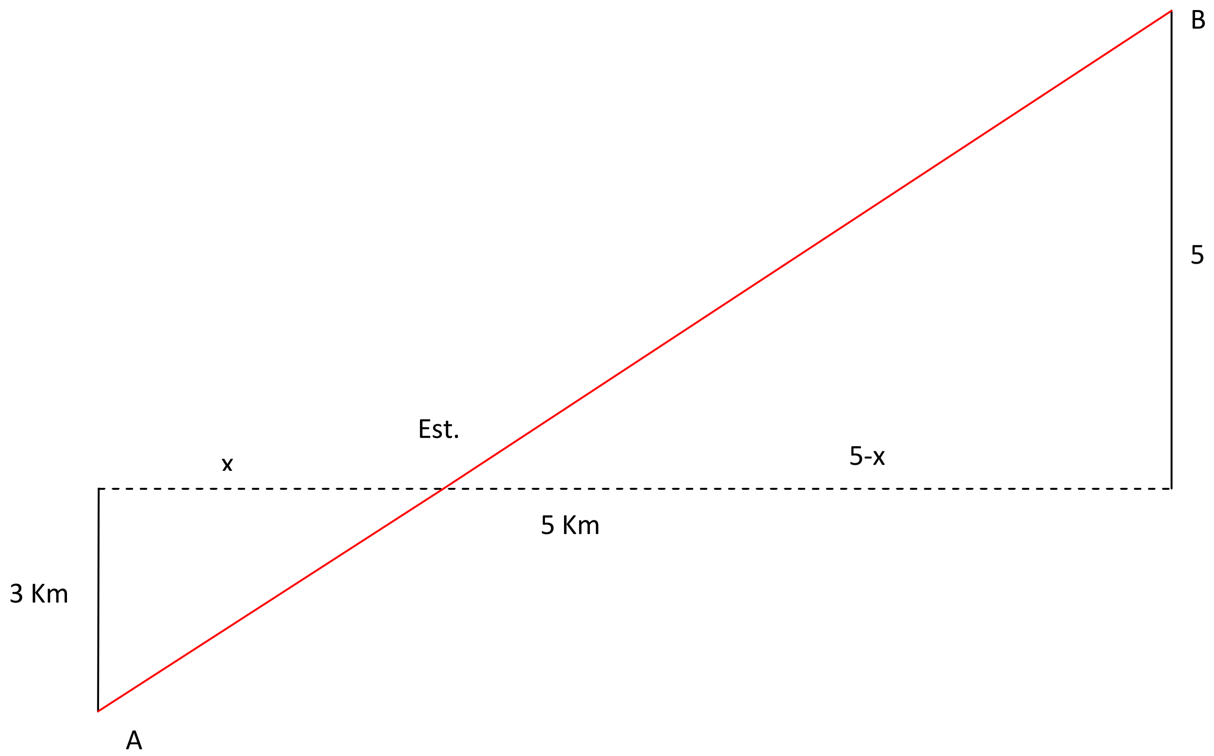
Y la distancia total vale:

$$d_{min} = 3{,}5377 + 5{,}8962 = 9{,}4339$$

Esa es la forma de hacerlo utilizando los problemas de optimización. Hay una forma muuuuuucho más rápida y sencilla, lo que pasa (como ya os he advertido) es que exige una cierta dosis de "pensamiento lateral" ¿Os atrevéis?

En el fondo es solucionar este problema como se solucionan las carambolas de billar. Me explico:

En vez de plantear el problema como uno de optimización ¿qué ocurre si hacemos una simetría de uno de los pueblos respecto a la vía?. "Giramos" A y ¿qué obtenemos?:



El punto de distancia mínima será el que haga que A-Est-B estén en línea recta ya que la recta es la distancia mínima entre dos puntos (al menos en un espacio euclídeo). Por lo tanto, tenemos dos triángulos opuestos por el vértice, por lo que son semejantes y, aplicando el teorema de Thales tenemos que:

$$\frac{x}{5} = \frac{5 - x}{3}$$

$$3x = 5 \cdot (5 - x)$$

$$3x = 25 - 5x$$

$$8x = 25$$

$$x = \frac{25}{8} = 3{,}125$$

La otra longitud es 5 – x = 1,875.

Para calcular la distancia, calculas las hipotenusas o una única hipotenusa con 5 y 8, por lo tanto:

$$d = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89} = 9{,}4339$$

Y te quedas con el respetable!!!!