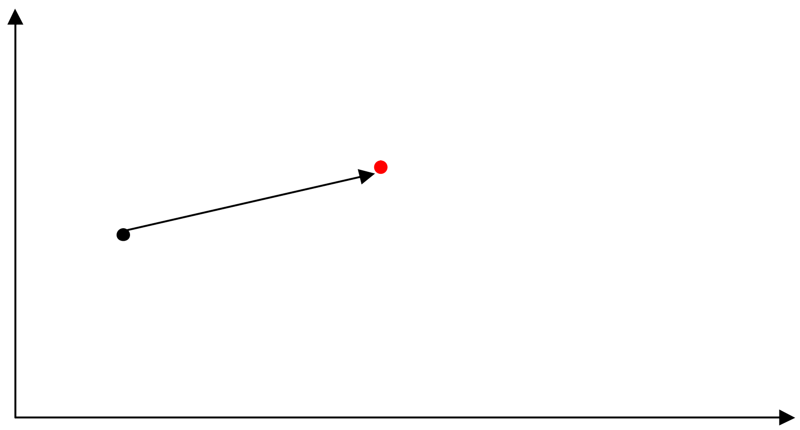
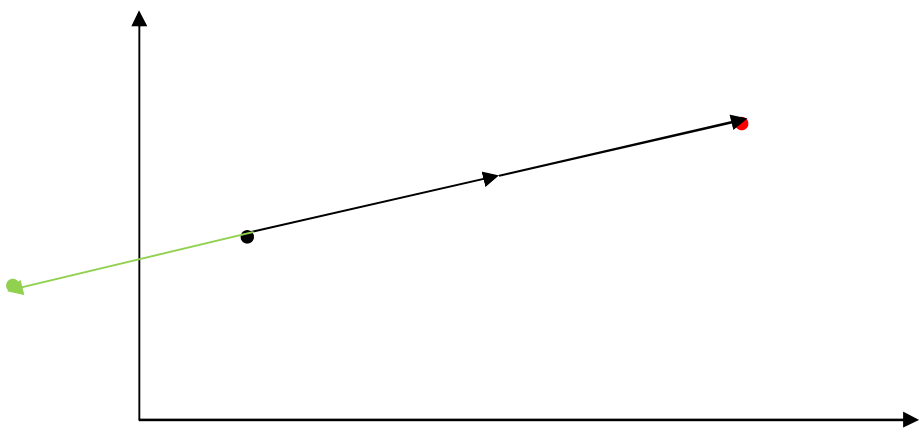
Todo el mundo sabe que “dos puntos definen una recta”, pero los matemáticos son un poco diferentes y, aún aceptando la máxima universal, ellos prefieren decir que “un punto y un vector nos definen una recta”. ¿Por qué hago esta diferencia? Veamos. Supongamos que tengo un punto y un vector director de la recta, entonces, si al punto le sumo una vez el vector tendremos:



Si ahora le sumamos 2 veces el vector (o se lo restamos una vez) tendremos:



Obtenemos otros dos puntos de la recta. Así, sumando a nuestro punto P de la recta un número indeterminado de veces el vector director v, obtenemos TODOS los posibles puntos de la recta. La forma de poner esto en forma matemática es utilizando un parámetro lambda, es decir, llamando a las coordenadas de nuestro punto P = (x_0, y_0) y a las coordenadas del vector v = (v_1, v_2) tenemos que un punto genérico de la recta (x, y) cumplirá que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Esta es la forma vectorial de la recta. Si desarrollamos las dos posibles ecuaciones, tendremos las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\begin{Bmatrix} x = x_0 + \lambda \cdot v_1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot v_2 \end{Bmatrix}$$

Si despejamos lambda en las dos ecuaciones y las igualamos entre sí tendremos la ecuación continua de la recta, muy útil para cuando, al definir la recta, te dan el punto y el vector:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

Si multiplicamos en cruz tendremos:

$$v_1 \cdot (y - y_0) = v_2 \cdot (x - x_0)$$

$$v_1 \cdot y - v_1 \cdot y_0 = v_2 \cdot x - v_2 \cdot x_0$$

Ahora podemos agrupar de dos formas, "dejando aislada y" (que nos dará la forma explícita de la recta o "pasando todo al mismo lado" que nos dará la forma general. Veamos la explícita:

$$y = \frac{v_2}{v_1} \cdot x + \frac{(v_1 \cdot y_0 - v_2 \cdot x_0)}{v_1} = m \cdot x + b$$

Si nos fijamos bien, $m = v_2/v_1$ es precisamente, la tangente del ángulo que forma el vector con la horizontal (cateto opuesto/cateto contiguo), por eso, la llamamos la pendiente. Por otro lado, si en esta ecuación le "damos a x el valor 0" ¿cuánto vale la y?, pues resulta que vale b. Por lo tanto b es "la altura a la que la recta corta al eje vertical". Con esto, dibujar la recta es muy fácil. Subimos (o bajamos si b es negativo) por el eje y lo que nos dice b y luego, con la pendiente que nos digan, dibujamos la recta.

Por otro lado, si partimos de:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

Es muy fácil llegar a:

$$y - y_0 = \frac{v_2}{v_1} \cdot (x - x_0)$$

Pero ese cociente, es precisamente lo que hemos llamado m, por lo tanto, tenemos la fórmula:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_o)$$

Que es la forma más cómoda para trabajar cuando te dan la pendiente y un punto.

Abrimos aquí un pequeño paréntesis. A veces en Análisis Matemático te piden que halles la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en un determinado punto x_0. Lo que haces es calcular $y_0 = f(x_0)$ y $m = f'(x_0)$. Entonces ya puedes escribir la ecuación de la recta tangente, que te quedará:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Y problema resuelto.

Cerramos el paréntesis

Por último, si hacemos lo que había dicho de “pasarlo todo al mismo lado”, lo que nos queda es la ecuación general de la recta que es de la forma:

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

¿Qué significan estas letras? Pues fijémonos bien. Supongamos que tengo dos puntos cualesquiera de la recta, por ejemplo P = (P_1, P_2) y Q = (Q_1, Q_2). Si pertenecen a la recta, cada uno de los dos cumplirá la ecuación de la recta ¿no?, por lo tanto, sabemos que:

$$A \cdot P_1 + B \cdot P_2 + C = 0$$

$$A \cdot Q_1 + B \cdot Q_2 + C = 0$$

Ahora las resto y, ¿qué nos queda?

$$A \cdot P_1 + B \cdot P_2 + C - A \cdot Q_1 - B \cdot Q_2 - C = 0$$

$$A \cdot (P_1 - Q_1) + B \cdot (P_2 - Q_2) = 0$$

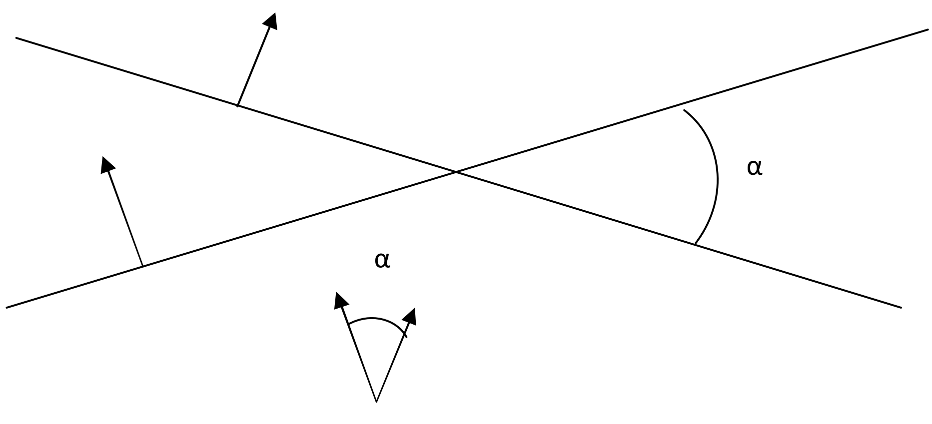
Si os fijáis bien, P y Q son dos puntos cualesquiera de la recta, por lo tanto, al restarlos tenemos un vector director cualquiera de la recta: QP = P – Q = (P_1-Q_1, P_2-Q_2) = (v_1,v_2) y la expresión que tenemos arriba no es más que la expresión del producto escalar del vector (A,B) por el vector v. Como que nos da 0, resulta que son perpendiculares. Por lo tanto, el vector de coordenadas (A,B) es un vector PERPENDICULAR a la recta.

Así, si nos piden “Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la recta 2x-3y+2=0 que pasa por el punto (2,-1)”. Es trivial. El vector director de la recta que nos piden será (A,B)=(2, -3) y, como que tenemos punto y vector, la forma más cómoda es:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3}$$

Yatá.

Y ahora por fin llegamos a la idea que quería explicar. ¿Cómo saber si dos rectas que se cortan son perpendiculares o simplemente secantes? Necesitamos un poco de geometría. Dibujo dos rectas que se cortan y sus vectores perpendiculares:



Resulta que el ángulo que forman los vectores perpendiculares a las rectas, es el mismo que forman las rectas, por lo tanto, lo que hemos de mirar es si los vectores (A,B) de las rectas son perpendiculares y la forma de mirarlo es haciendo el producto escalar. Si nos dicen “¿Son perpendiculares las rectas 2x-y+3=0 y x+2y-5=0?”. Hacemos el producto escalar y tenemos:

$$(2,-1)\cdot(1,2)= \ 2\cdot 1-1\cdot 2=2-2=0$$

Son perpendiculares!!!.

Y si nos dicen “Encontrar la recta perpendicular a 2x+3y+4=0 que pasa por (1,1)”. Podemos hacerlo de dos formas. El vector (2,3) es perpendicular a la recta que nos dan, por lo tanto, será el vector director de nuestra recta. Si ha de pasar por (1,1), ya tenemos punto y vector, por lo tanto:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}$$

Pero podemos hacerlo de otra forma. Sabemos que el vector perpendicular a la recta que nos dan es (2,3). ¿Cómo será un vector perpendicular a éste? Pues será (3,-2) ó (-3,2) ya que:

$$(2,3)\cdot(3,-2)= \ 2\cdot 3+3\cdot(-2)= \ 6-6=0$$

Y el otro…

$$(2,3)\cdot(-3,2)= \ 2\cdot(-3)+ \ 3\cdot 2= \ -6+6=0$$

Por lo tanto, mi recta , expresada de la forma Ax+By+C=0 será de la forma:

$$3\cdot x-2\cdot y+C=0$$

¿Cómo calculo C? Pues si (1,1) es un punto de la recta tendrá que cumplir la ecuación, por lo tanto:

$$3\cdot 1-2\cdot 1+C=0$$

Por lo que C=-1 y la ecuación es:

$$3\cdot x-2\cdot y-1=0$$

Que es equivalente a la que hemos encontrado antes.

Sólo nos queda justificar que si una recta tiene pendiente m, su perpendicular tendrá pendiente m’ = -1/m. Pero esto es muy fácil. Si recordamos, si el vector director es $v=(v_1,v_2)$ la pendiente $m=v_2/v_1$. Si ahora calculamos la “otra” pendiente, tenemos que:

$$m'=\frac{-1}{m}=\frac{-1}{{}^{v_2}/_{v_1}}=\frac{-v_1}{v_2}$$

Y por lo tanto, el vector director al que corresponde esta pendiente es un vector $v' = (v_2, -v_1)$, que, como ya hemos visto, por fuerza es perpendicular al anterior, ya que:

$$v'\cdot\ v=(v_2,-v_1)\cdot(v_1,v_2)= \ v_2\cdot v_1-v_1\cdot v_2=0$$

Ahora sí. Yatá