Supongamos que en el tercer problema nos piden que demostremos que B es una base de W. Pues hemos de demostrar dos cosas, a saber:

1. Que son L.I.
2. Que son generadores de W

Para demostrar que son L.I. lo único que hemos de encontrar es algún menor cuyo determinante sea distinto de cero en la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Que, si cogemos el menor central, ya lo hemos conseguido:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - (-2) \cdot 4 = 8 \neq 0$$

Ahora nos queda demostrar que son generadores de W. Recordar que W nos lo definían como W = {(x,y,z,t) / x=y, z=2t). Por lo tanto, un vector de W será SIEMPRE de la forma:

$$w = (x, x, 2t, t)$$

Ahora lo que hemos de hacer para comprobar que los vectores de B generan W es poner un vector genérico de W como combinación lineal de B. Es decir:

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ATENCIÓN!!!. Ahora hay que hacer un “cambio de chip”. En esta igualdad, x y t son “valores genéricos”, es decir, pueden ser cualquier número. NO SON NUESTRAS INCÓGNITAS. Nuestras incógnitas al resolver el problema son las lambdas. Así nos encontramos con un sistema “superabundante” ya que tenemos sólo dos incógnitas y tenemos cuatro ecuaciones. Si conseguimos resolverlo, es decir, si conseguimos despejar las lambdas sin entrar en contradicciones, entonces habremos probado que son generadores. Si llegamos a una contradicción, pues no. Al resolver tenemos:

$$\begin{gathered} x = \lambda_1 - 2\lambda_2 \\ x = \lambda_1 - 2\lambda_2 \\ 2t = 4\lambda_1 \\ t = 2\lambda_1 \end{gathered}$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{gathered} \lambda_1 = \frac{t}{2} \\ \lambda_2 = \frac{t}{4} - \frac{x}{2} \end{gathered}$$

Por lo tanto, hemos conseguido expresar nuestras incógnitas (las lambdas) en función de los números genéricos x y t. SON GENERADORES.