DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Para saber si unos vectores son linealmente dependientes o linealmente independientes, lo que hacemos es ponerlos en forma de matriz y mirar el rango de ésta. Por ejemplo:

Tenemos los vectores v1=(1,0,1) v2=(0,1,1) y v3=(2,1,3) y queremos saber si son linealmente dependientes o independientes. Construimos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y miramos su rango. En este caso tenemos suerte y nos queda una matriz cuadrada, por lo que lo primero es calcular el determinante de la matriz (desarrollo por la 1ª columna):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3-1) + 1 \cdot (0-2) = 2 - 2 = 0$$

Por lo tanto, ya vemos que son Linealmente Dependientes.

Si en vez de eso nos pidieran el rango de esa matriz, con lo que acabamos de hacer, ya podemos decir que el rango NO ES 3. Ahora vamos a comprobar si es 2. Para eso escogemos una submatriz de 2 x 2 de las muchas que hay en la matriz original y calculamos su determinante. Es fácil encontrar una que dé distinto de 0. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

Por lo tanto el rango de esa matriz es 2.

También podemos concluir que el espacio que generan v1, v2 y v3 es un subespacio de dimensión 2 y que, por lo tanto v1, v2 y v3 NO son una base (porque son linealmente dependientes)

Si nos pidieran una base de ese subespacio, tendríamos que encontrar dos vectores linealmente independientes. Pero eso YA LO HEMOS HECHO. Al demostrar que el rango de la matriz es 2 hemos escogido una matriz 2 x 2 con determinante distinto de cero. Pues los dos vectores que incluyen la submatriz (es decir, (1,0,1) y (0,1,1)) son Linealmente Independientes. Y como son 2 vectores L.I. en un subespacio de dimensión 2, pues son una base. Tachaaaaaan.

Sin embargo, si nos dan 3 vectores como u1=(1,0,1), u2=(0,1,1) y u3=(1,1,1), al ponerlos como matriz y calcular el determinante tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1-1) - 0 + 1 \cdot (0-1) = 0 - 0 - 1 = -1$$

Por lo que los tres vectores son linealmente Independientes. Y como son tres vectores L.I. en un espacio de dimensión 3 (como es R^3), pues esos tres vectores son una base de R^3. Más tachaaaan.